# Способы решения планиметрических задач на отношения длин отрезков и площадей

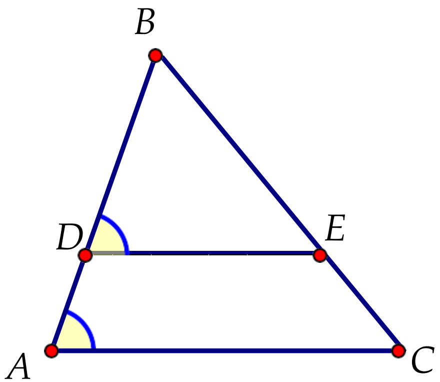
**Тихомирова Наталья Николаевна**
**учитель математики**
**лицей № 2, г. Рыбинск**

# Отношение отрезков. Подобие треугольников

## Полезные факты

### *Типичные случаи подобия треугольников*

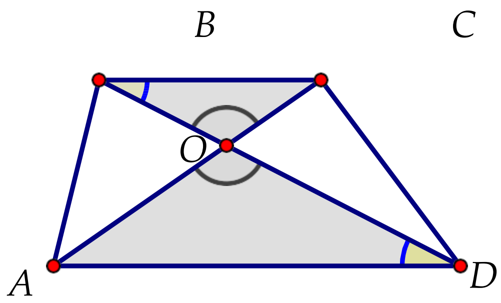
**1. *Параллельный отрезок в треугольнике***




$DE \parallel AC$

$\Delta DBE \sim \Delta ABC$

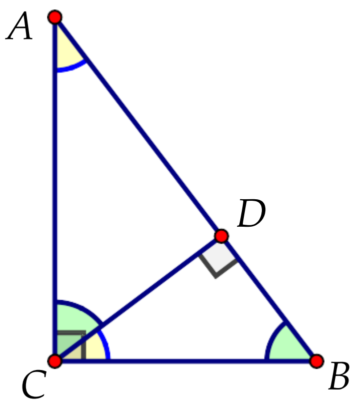
**2. *"Песочные часы"***




$BC \parallel AD$

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$

**3. *Высота, проведенная к гипотенузе***

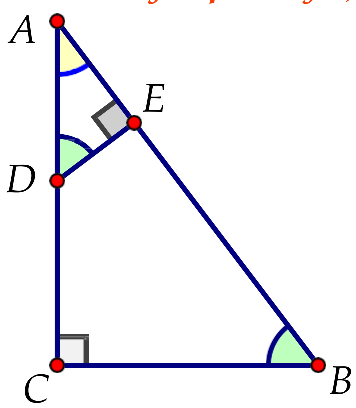



$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

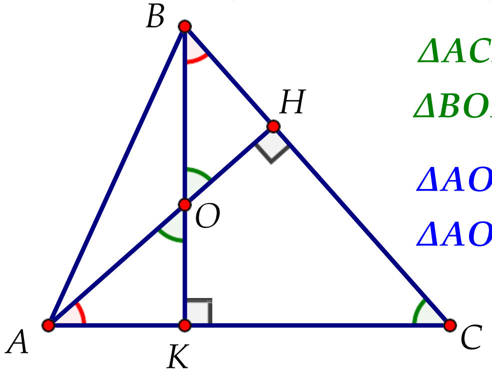
$\Delta CBD \sim \Delta ABC$

**4. *Перпендикуляр, опущенный на гипотенузу***




$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

## 5. Высоты, проведенные в треугольнике I




$\Delta ACH \sim \Delta BCK$

$\Delta BOH \sim \Delta BCK$

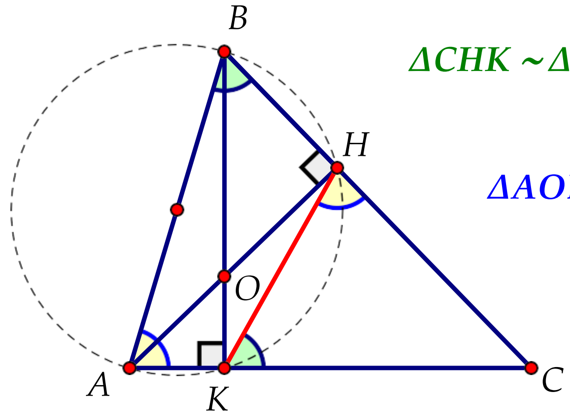
$\Delta AOK \sim \Delta BOH$

$\Delta AOK \sim \Delta ACH$

$\Delta ACH \sim \Delta BOH$

$\Delta BOH \sim \Delta ACH$

## 6. Высоты, проведенные в треугольнике II

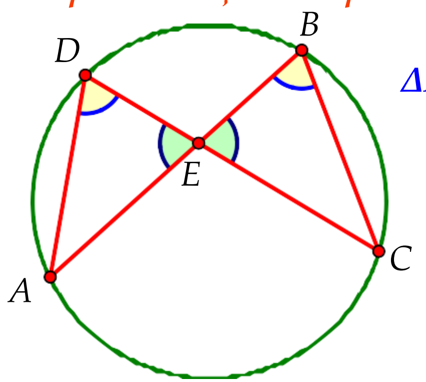



$\Delta CHK \sim \Delta CAB$

$$k = \frac{CH}{AC} = |\cos C|$$

$\Delta AOB \sim \Delta KOH$

## 7. Пересекающиеся хорды

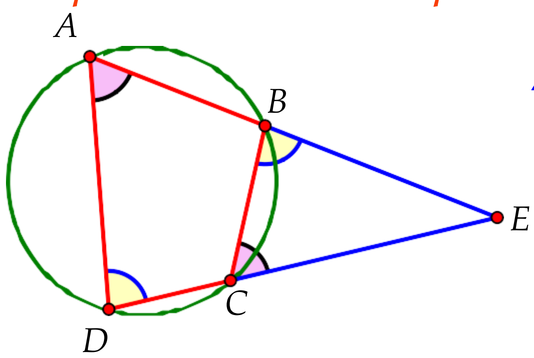



$\Delta ADE \sim \Delta CBE \quad \Rightarrow \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{DE}{BE}$

$$\boxed{AE \cdot BE = DE \cdot CE}$$

*теорема об отрезках пересекающихся хорд*

## 8. Четырехугольник вписан в окружность - продлим противоположные стороны до их пересечения

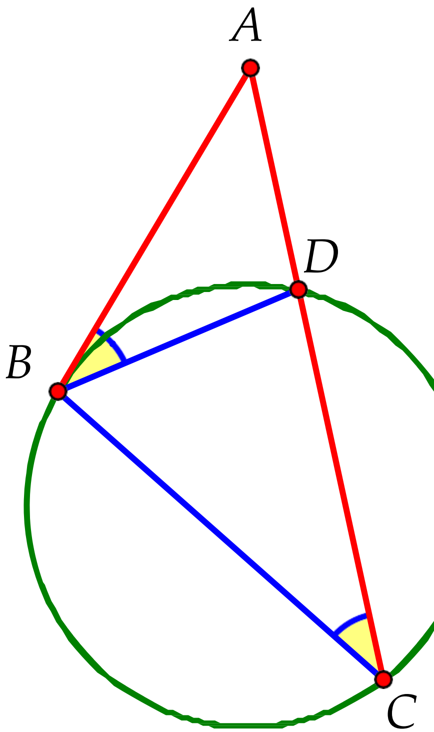



$\Delta BEC \sim \Delta DEA \quad \Rightarrow \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{CE}{AE}$

$$\boxed{AE \cdot BE = DE \cdot CE}$$

*теорема о секущих*

## 9. Касательная и секущая




***AB* - касательная, *AC* - секущая**

$$\Delta ABD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\boxed{AB^2 = AD \cdot AC}$$

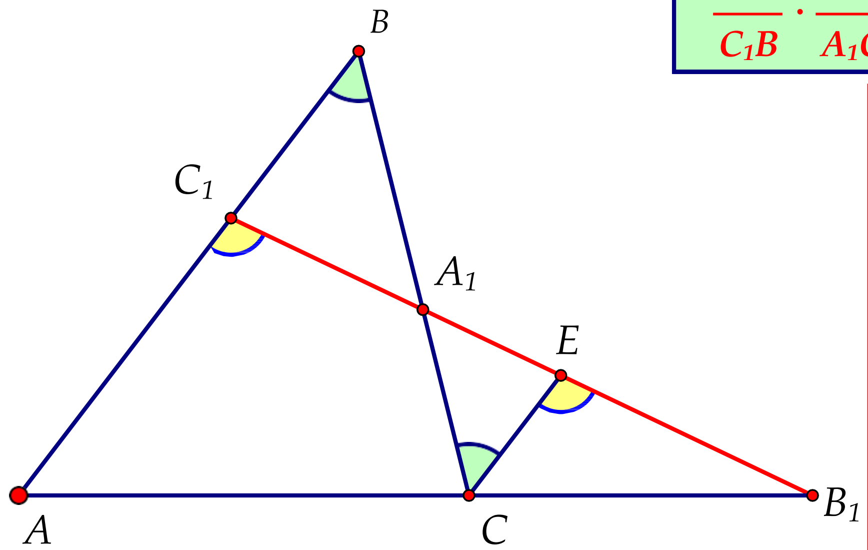
*теорема о касательной*
*и секущей*

# Редкие теоремы планиметрии

## 1. Теорема Менелая.

***Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$




**Доказательство:**

$CE \parallel AB$ *(по построению)*

$$\Delta AC_1B_1 \sim \Delta CEB_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{CE}=\frac{B_1A}{CB_1} \Rightarrow CE=\frac{AC_1\cdot CB_1}{B_1A} \quad (1)$$

$$\Delta C_1BA_1 \sim \Delta ECA_1 \Rightarrow \frac{C_1B}{CE}=\frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow CE=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1} \quad (2)$$

*Приравнивая (1) и (2), получим:*

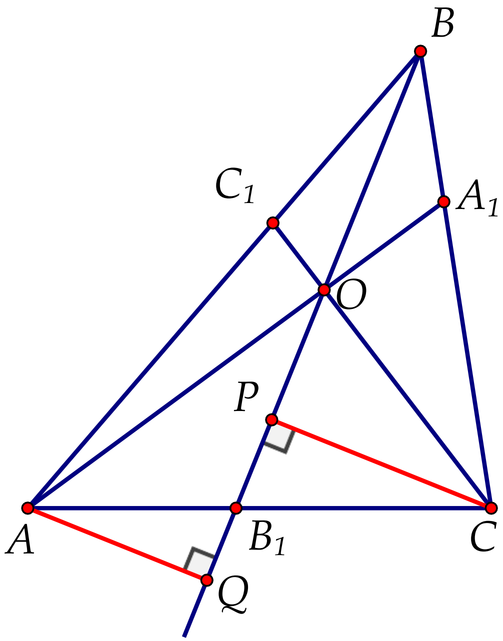
$$\frac{AC_1\cdot CB_1}{B_1A}=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1}$$

*Отсюда:* $$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

## 2. Теорема Чевы.

***Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:***

$$\boxed{\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1} \quad (*)$$




**Доказательство:**

$AQ \perp BB_1$, $CP \perp BB_1$

$S_{\Delta AOB}=0,5\cdot OB\cdot AQ$; $S_{\Delta BOC}=0,5\cdot OB\cdot CP$; $\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}}=\dfrac{AQ}{CP}$ (1)

$\Delta AQB_1 \sim \Delta CPB_1 \Rightarrow \dfrac{AQ}{CP}=\dfrac{B_1A}{CB_1}$ (2)

Из (1) и (2) следует: $\boxed{\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}}=\dfrac{B_1A}{CB_1}}$ (3) Аналогично: $\boxed{\dfrac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}=\dfrac{AC_1}{C_1B}}$ (4)

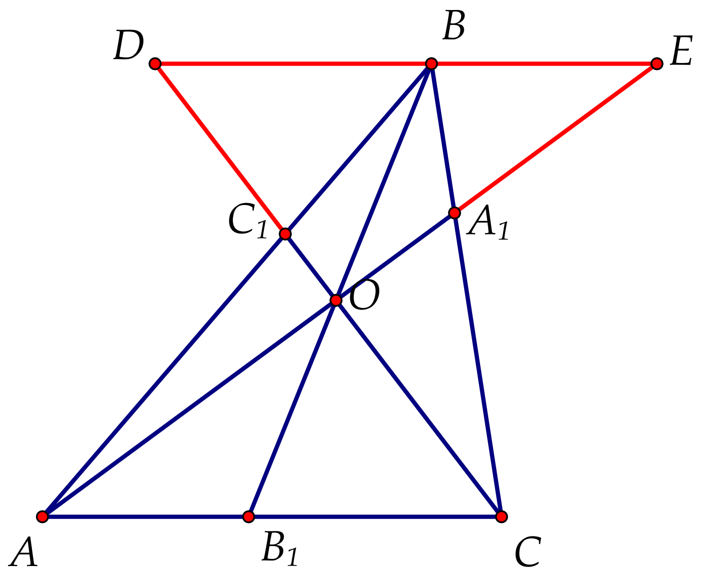
$\boxed{\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}=\dfrac{BA_1}{A_1C}}$ (5)

Подставим (3), (4) и (5) в равенство (*): $\dfrac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}\cdot\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}\cdot\dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOB}}=1$; $1=1$ (верно)

## 3. Теорема Ван-Обеля.

***Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Если прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке, то имеет место равенство:***

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$$




### Доказательство:

$DE \parallel AC$

$$\Delta AOC \sim \Delta DOE \Rightarrow \frac{BO}{OB_1} = \frac{DE}{AC} = \frac{DB + BE}{AC} = \frac{DB}{AC} + \frac{BE}{AC} \quad (1)$$

$$\Delta EBA_1 \sim \Delta ACA_1 \Rightarrow \frac{BE}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C} \quad (2)$$

$$\Delta BDC_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{DB}{AC} = \frac{BC_1}{C_1A} \quad (3)$$

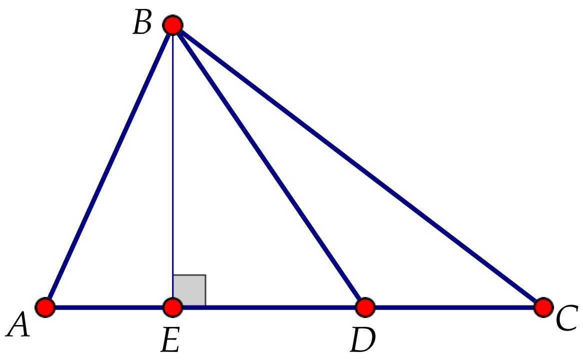
***Подставив (2) и (3) в (1), получим:***

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$$

## Отношение площадей.

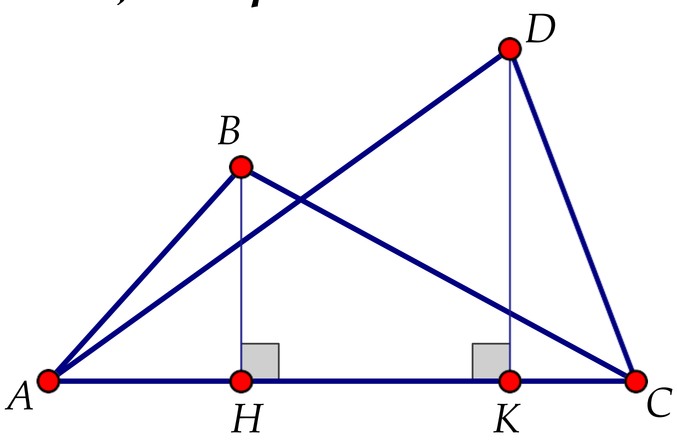
### Полезные факты

**1.** ***Если два треугольника имеют равные высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты)***



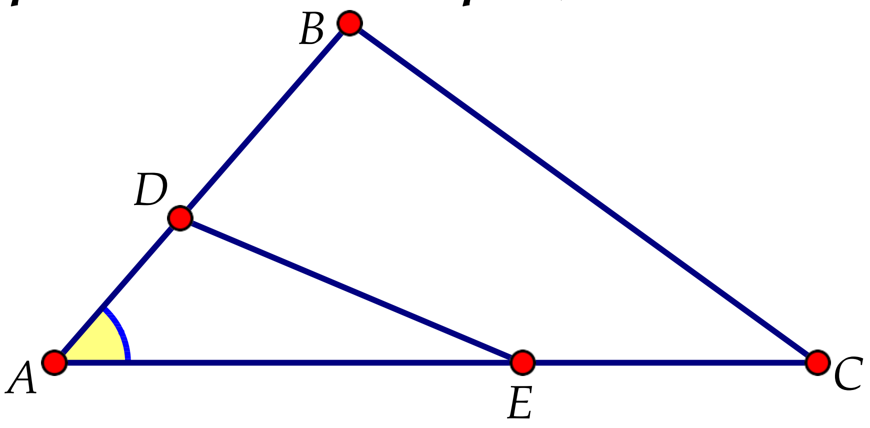

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{AD}{CD}$$

**2.** ***Если два треугольника имеют одинаковое основание, то отношение их площадей равно отношению высот, проведенных к этому основанию:***




$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{BH}{DK}$$

**3. *Площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, заключающих этот угол***



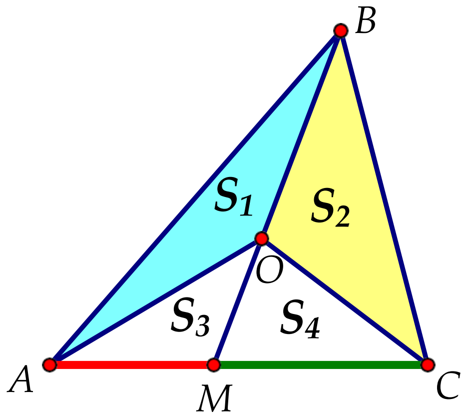

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}}$$

**4. *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия***

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = k^2}$$

## 5. СВОЙСТВО "ДЕЛЬТАПЛАНА"

***Для любой точки O на чевиане BM треугольника ABC площади треугольников ABO и BCO относятся как отрезки AM и CM.***

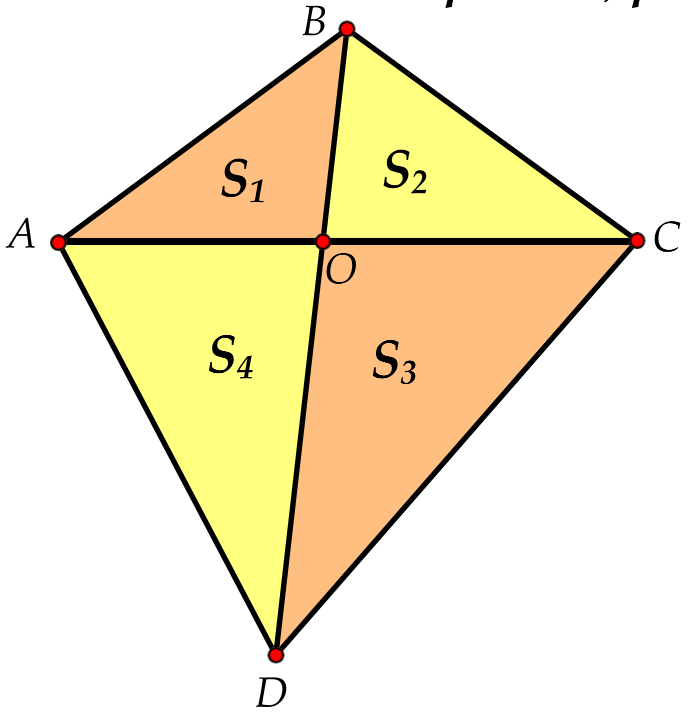



$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta BCO}} = \frac{AM}{CM}}$$

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{BO}{OM} = \frac{S_2}{S_4} \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{AM}{CM}$$

## 6. СВОЙСТВО "ВОЗДУШНОГО ЗМЕЯ"

***Если диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника, то произведения площадей треугольников, прилегающих к его противоположным сторонам, равны.***



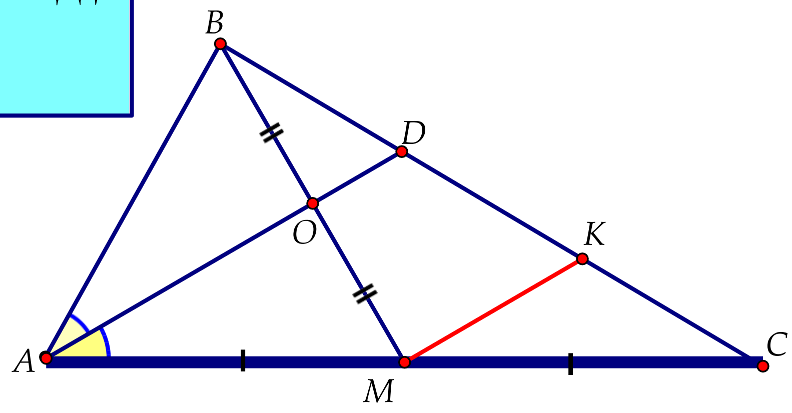

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{BO}{OD} = \frac{S_2}{S'_3};$$

**1.** Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам.

а) Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD

б) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD




**1 способ**

а) $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ *(свойство биссектрисы)*

*AO - биссектриса и медиана* $\Delta ABM \Rightarrow \Delta ABM$ *равнобедренный*

$AB=AM=\frac{1}{2}AC;\quad \frac{BD}{CD}=\frac{1}{2};\quad \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{1}{2}\quad \Rightarrow S_{\Delta ACD}=2S_{\Delta ABD}$

**2 способ**

а) *По теореме Менелая для* $\Delta BMC$ *и секущей AD:* $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MO}{OB}=1;\quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}=1;\quad \frac{BD}{DC}=\frac{1}{2};$

$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}\quad \Rightarrow S_{\Delta ACD}=2S_{\Delta ABD}$

**3 способ**

а) *Проведем* $MK \parallel AD$. *Тогда K - середина CD (по т.Фалеса),* $\mathbf{CK=DK}$

*Аналогично D - середина BK,* $\mathbf{BD=DK;}$ ***Значит,*** $\mathbf{BD=DK=CK}$ ***и*** $\frac{BD}{CD}=\frac{1}{2};\quad \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}\quad \Rightarrow S_{\Delta ACD}=2S_{\Delta ABD}$

**4 способ**

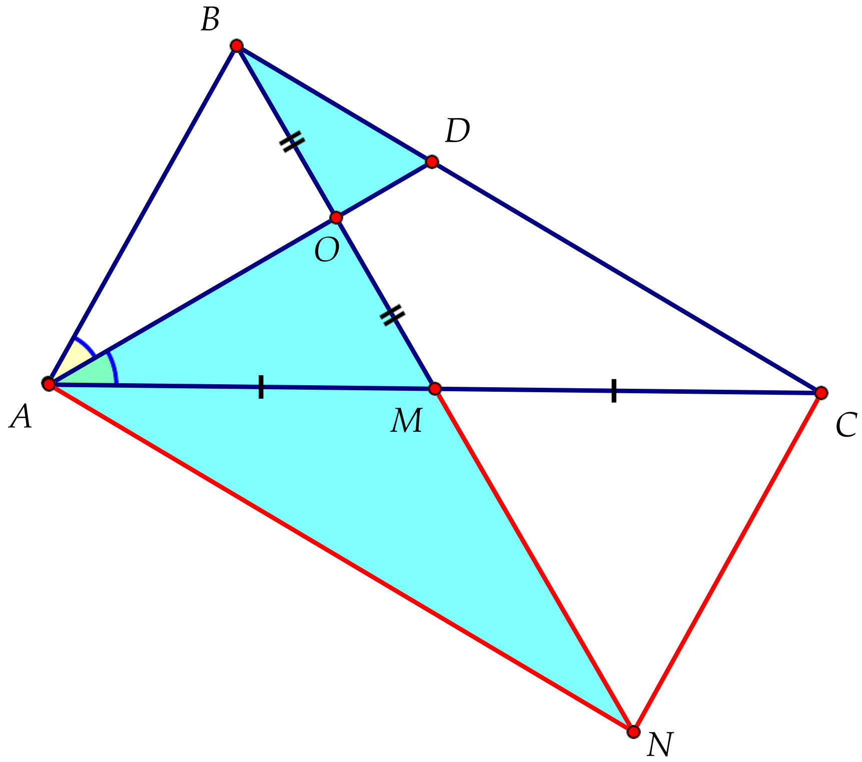
а) На продолжении медианы $BM$ отложим $MN = BM$

$ABCN$ - параллелограмм

$\Delta BOD \sim \Delta NOA$ (по двум углам), $BD : AN = BO : ON = 1 : 3$

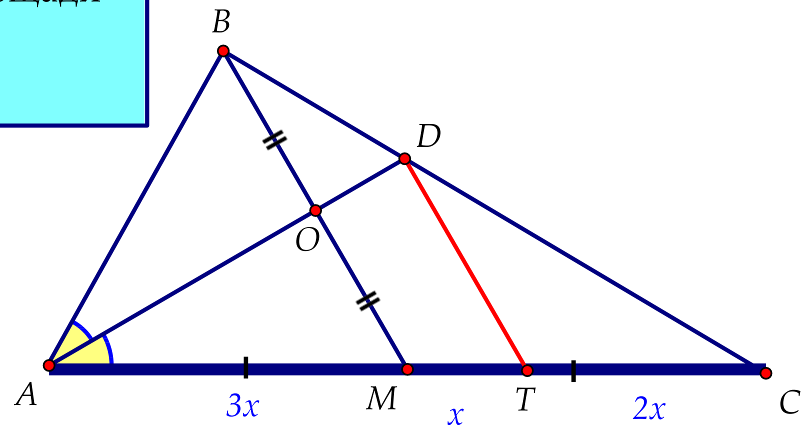
$AN = BC \Rightarrow \; BD : BC = 1 : 3,\ BD : CD = 1 : 2$

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow S_{\Delta ACD} = 2S_{\Delta ABD}$$



**1.** Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам. а) Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD

б) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD




**1 способ**

*б) По теореме Менелая для ΔACD и секущей MB:*

$$\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CM}{AM}=1;\qquad \frac{AO}{OD}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1;\qquad \frac{AO}{OD}=\frac{3}{1}.$$

**2 способ**

*б) Проведем DT ∥ BM. CT : TM = CD : BD = 2 : 1 (по теореме о пропорциональных отрезках)*

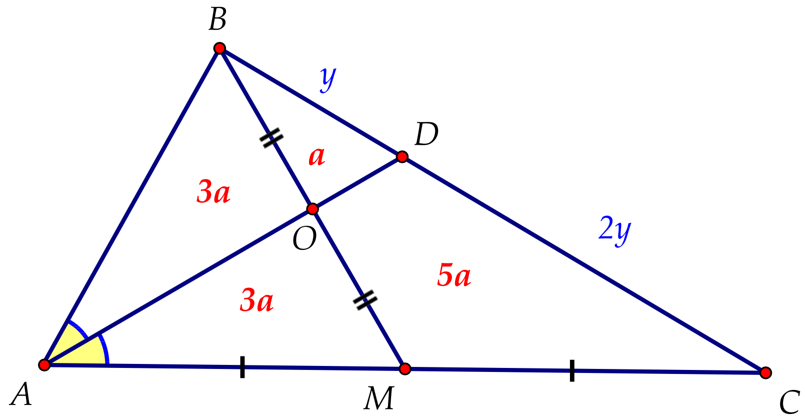
*Пусть MT = x, CT = 2x; AM = MC = 3x;*

*AO : OD = AM : MT = 3 : 1 (по теореме о пропорциональных отрезках)*

**3 способ**

б) $\frac{S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta BMC}}=\frac{BO}{BM}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$ *Пусть* $S_{\Delta BOD}=a$, *тогда* $S_{\Delta MODC}=5a$

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOM}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}S_{\Delta CBM}=3a;\quad \frac{AO}{OD}=\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOD}}=\frac{3a}{a}=\frac{3}{1}$$

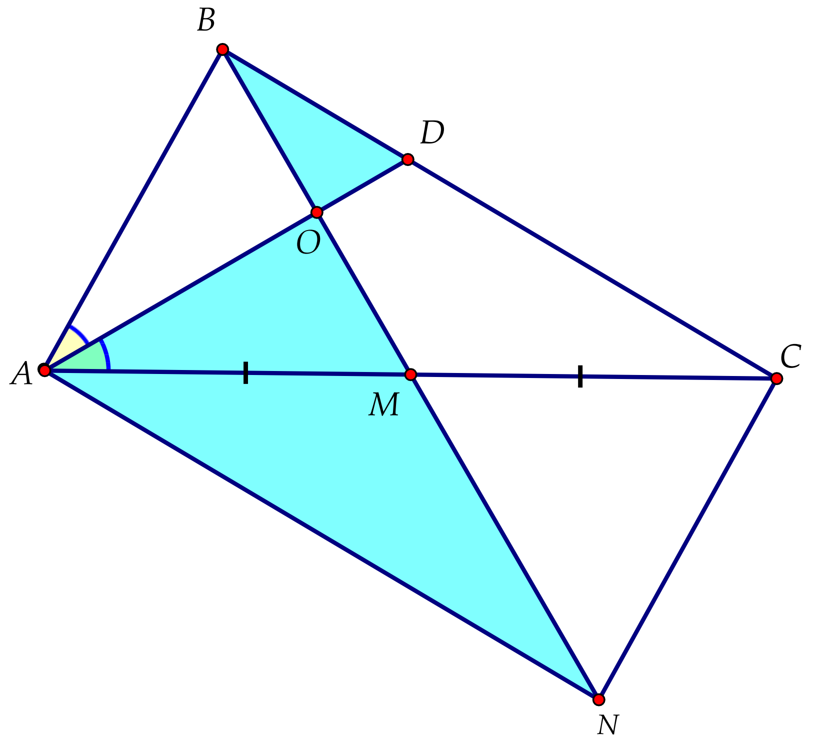


**4 способ**

*б) На продолжении медианы $BM$ за точку $M$ отложим отрезок $MN = BM$*

*$ABCN$ - параллелограмм $\Rightarrow AN = BC$*

*$\Delta BOD \sim \Delta NOA$ (по двум углам): $AO : OD = AN : BD = BC : BD = 3 : 1$*

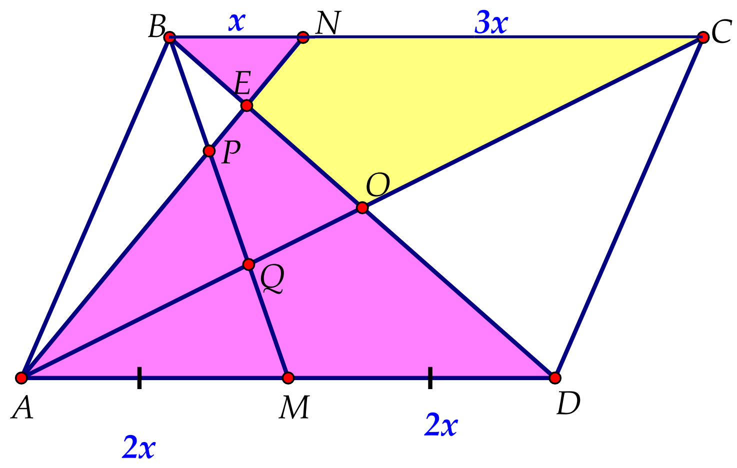



**Ответ: б) 3 : 1**

**2.** На сторонах $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $M$ и $N$, причём $M$ — середина $AD$, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые $AN$ и $AC$ делят отрезок $BM$ на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых $AN$, $AC$, $BD$ и $BC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.




*а)* $O$ *- середина* $BD \Rightarrow Q$ *- точка пересечения медиан* $\Delta ABD \Rightarrow QM = \frac{1}{3}BM$

$\Delta BPN \sim \Delta MPA$ *(по двум углам)* $\Rightarrow \frac{BP}{PM} = \frac{BN}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow BP = \frac{1}{3}BM$

*Значит,* $PQ = \frac{1}{3}BM.$ *Таким образом,* $BP = PQ = QM$

*б)* $\Delta BEN \sim \Delta DEA$ *(по двум углам)* $\Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{BN}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow BE = y,\ DE = 4y,\ BD = 5y;\quad BO = 2{,}5y$

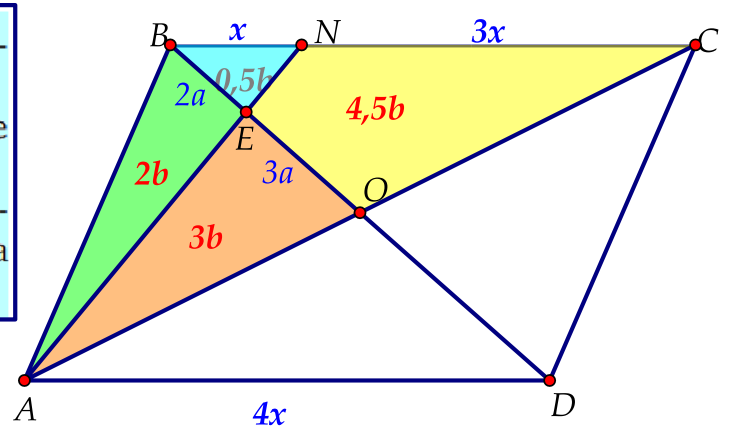
$$\frac{S_{\Delta BEN}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{0{,}5 \cdot BE \cdot BN \cdot \sin\angle NBE}{0{,}5 \cdot BO \cdot BC \cdot \sin\angle NBE} = \frac{y \cdot x}{2{,}5y \cdot 4x} = \frac{1}{10} \Rightarrow S_{OENC} = \frac{9}{10}S_{\Delta BOC} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{\Delta ABCD} = 9$$

***Ответ: б) 9***

**2.** На сторонах $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $M$ и $N$, причём $M$ — середина $AD$, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые $AN$ и $AC$ делят отрезок $BM$ на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых $AN$, $AC$, $BD$ и $BC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.




*2 способ*

б) Пусть $BD = 10a$

$\Delta BEN \sim \Delta DEA$ (по двум углам) $\Rightarrow BE = \dfrac{1}{5}BD = 2a$; $EO = BO - BE = 3a$

$\dfrac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AOE}} = \dfrac{BE}{EO} = \dfrac{2}{3}$. Пусть $S_{\Delta ABE} = 2b$, тогда $S_{\Delta AOE} = 3b$

$\dfrac{S_{\Delta BEN}}{S_{\Delta ABE}} = \dfrac{EN}{AE} = \dfrac{1}{4}$; $S_{\Delta BEN} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta ABE} = 0{,}5b$. $BO$ - медиана $\Delta ABC$, $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOB} = 5b$. Тогда, $S_{OENC} = S_{\Delta BOC} - S_{\Delta BEN} = 5b - 0{,}5b = 4{,}5b$.

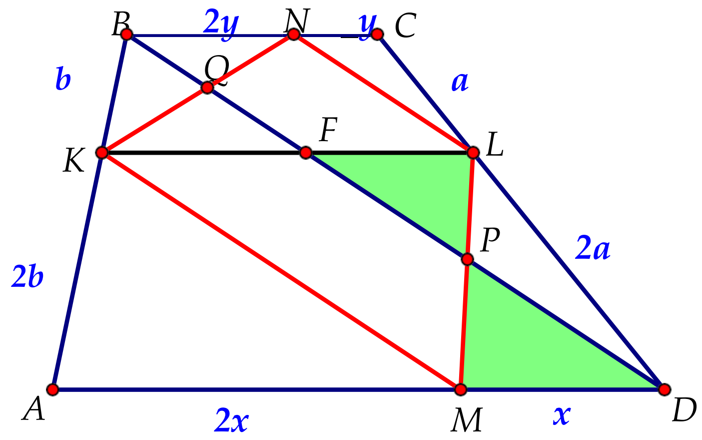
$S_{\Delta ABC} = 0{,}5S_{\Delta ABCD} = 20$; $10b = 20$, $b = 2$; $\boldsymbol{S_{OENC} = 4{,}5b = 9}$.

**Ответ: б) 9**

**3.** На основаниях $AD$ и $BC$ трапеции $ABCD$ отмечены точки $M$ и $N$ соответственно, а на боковых сторонах $AB$ и $CD$ — точки $K$ и $L$ соответственно. При этом $DM : AM = CN : BN = BK : AK = CL : LD = 1 : 2$.

а) Докажите, что четырёхугольник $KMLN$ — трапеция.

б) Известно, что $AD = 3BC$. В каком отношении диагональ $BD$ трапеции $ABCD$ делит боковые стороны трапеции $KMLN$?




*а)* $\left.\begin{array}{l} CN : CB = CL : CD \Rightarrow NL \parallel BD \\ AK : AB = AM : AD \Rightarrow KM \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow NL \parallel KM$

$\Delta CNL \sim \Delta CBD \Rightarrow NL = \dfrac{1}{3}BD;$ $\Delta AKM \sim \Delta ABD \Rightarrow KM = \dfrac{2}{3}BD;$ $NL \neq KM$

***Значит, KMLN - трапеция.***

*б)* $BD \cap KN = Q,\ BD \cap LM = P;\quad KL \cap BD = F;$

$AK : KB = DL : LC = 2 : 1 \Rightarrow KL \parallel AD$

$\Delta FDL \sim \Delta BDC \Rightarrow FL = \dfrac{2}{3}BC;$ $MD = \dfrac{1}{3}AD = \dfrac{1}{3} \cdot 3BC = BC$

$\Delta FPL \sim \Delta DPM \Rightarrow LP : PM = FL : MD = 2 : 3$

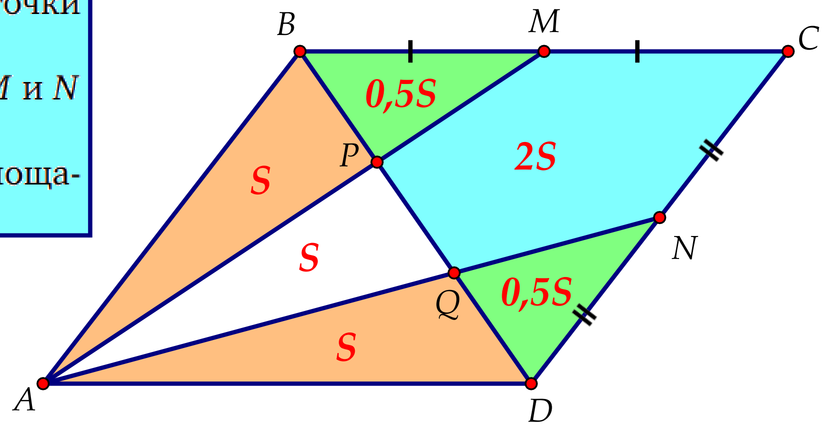
*Так как* $KM \parallel BD$, *то* $NQ : QK = LP : PM = 2 : 3.$

***Ответ: б) 2 : 3***

**4.** На диагонали $BD$ параллелограмма $ABCD$ отмечены точки $P$ и $Q$, причём $BP = PQ = QD$.

а) Докажите, что прямые $AP$ и $AQ$ проходят через середины $M$ и $N$ сторон $BC$ и $CD$ соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника $CMPQN$ к площади параллелограмма $ABCD$.




*а)* $\Delta MPB \sim \Delta APD$ *(по двум углам)* $\Rightarrow \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{PB}{PD} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow BM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC$ $\Rightarrow$ ***M - середина BC***

*Аналогично из подобия* $\Delta DQN$ *и* $\Delta BQA$: $DN = \dfrac{1}{2}CD$ $\Rightarrow$ ***N - середина DC***

*б) Пусть* $S_{\Delta ABP} = S$; $AP$ *и* $AQ$ *- медианы* $\Delta ABQ$ *и* $\Delta DAP$ *соответственно* $\Rightarrow S_{\Delta DAQ} = S_{\Delta PAQ} = S_{\Delta ABP} = S$

$$\frac{S_{\Delta BPM}}{S_{\Delta ABP}} = \frac{PM}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\Delta BPM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABP} = \frac{S}{2}; \quad \frac{S_{\Delta DQN}}{S_{\Delta AQD}} = \frac{QN}{AQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\Delta DQN} = \frac{1}{2}S_{\Delta AQD} = \frac{S}{2}.$$

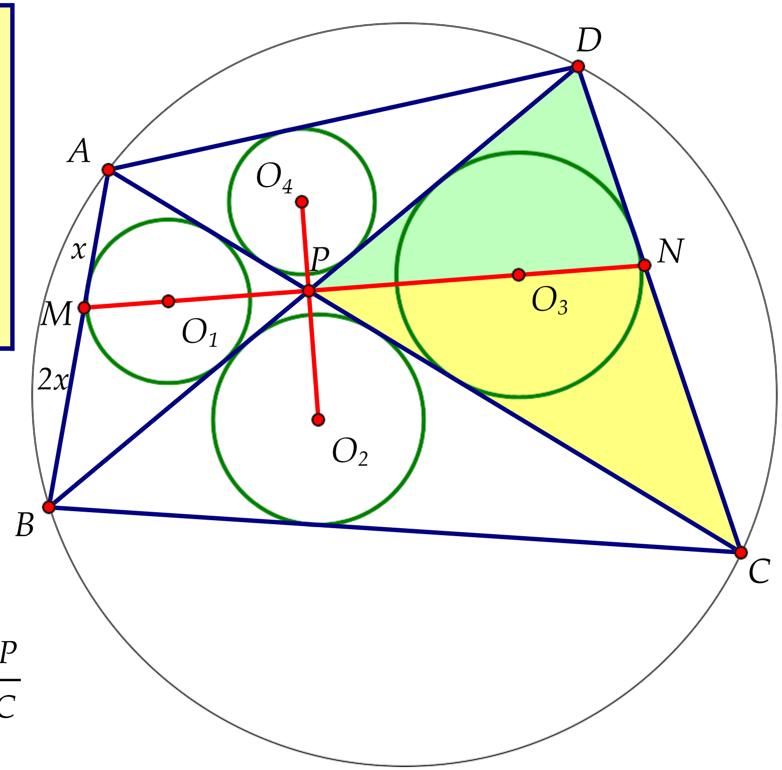
*Тогда* $S_{CMPQN} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta BPM} - S_{\Delta DQN} = 3S - S = 2S$; $\dfrac{S_{CMPQN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{2S}{6S} = \dfrac{1}{3}$

***Ответ: б) 1 : 3***

**5.** Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке P. В треугольники APB, BPC, CPD и APD вписаны окружности с центрами $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $O_1O_3$ и $O_2O_4$ перпендикулярны

б) Пусть прямая $O_1O_3$ пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите отношение площадей треугольников CPN и DPN, если около четырехугольника ABCD можно описать окружность и AM : MB = 1 : 2.




*а) $O_1$ - точка пересечения биссектрис $\Delta ABP$*

*Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то прямые $O_1O_3$ и $O_2O_4$ пересекаются в точке P.*

$\angle O_1PO_4 = 90°$ *(угол между биссектрисами смежных углов)*

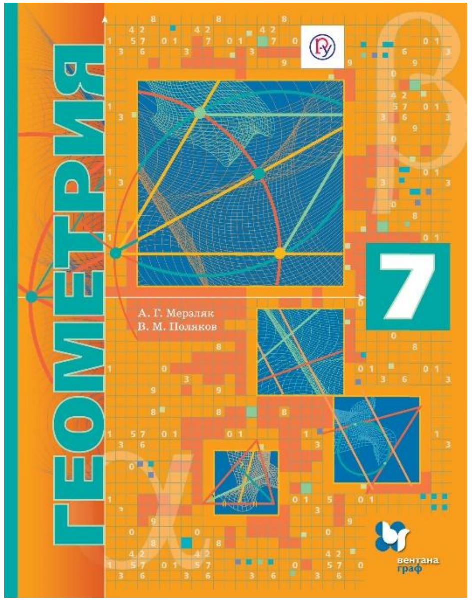
*б) По свойству биссектрисы:* $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AP}{PB}$ *и* $\dfrac{DN}{NC} = \dfrac{DP}{PC}$

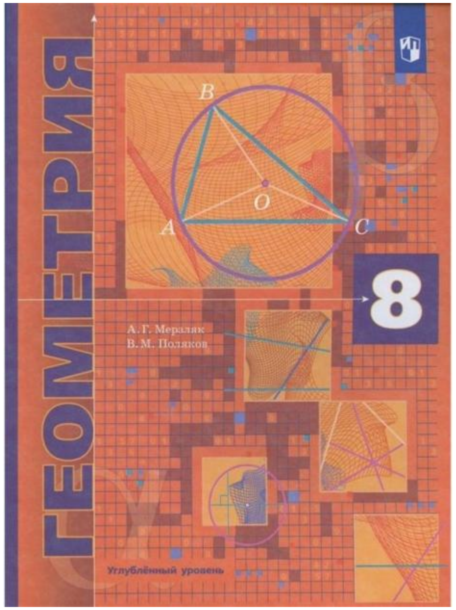
*По теореме об отрезках пересекающихся хорд:* $AP \cdot PC = DP \cdot PB \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{DP}{PC}$

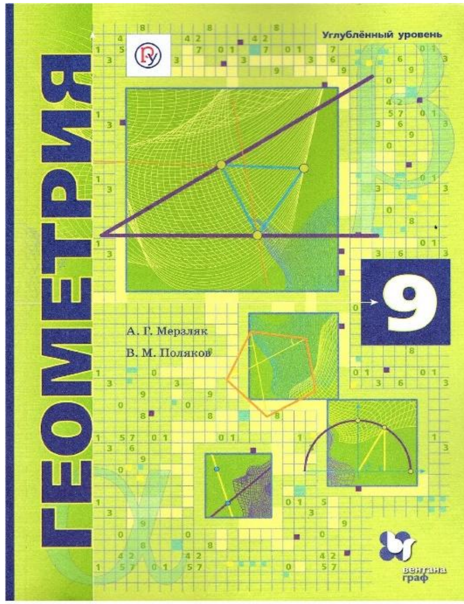
$$\Rightarrow \frac{DN}{NC} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}; \quad \boxed{\frac{S_{\Delta CPN}}{S_{\Delta DPN}} = \frac{NC}{DN} = \frac{2}{1}}$$

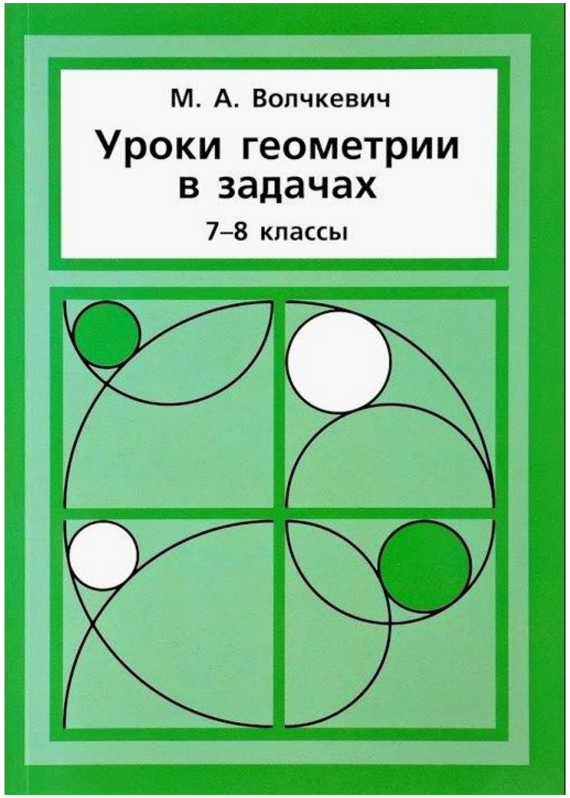
***Ответ: б) 2 : 1***

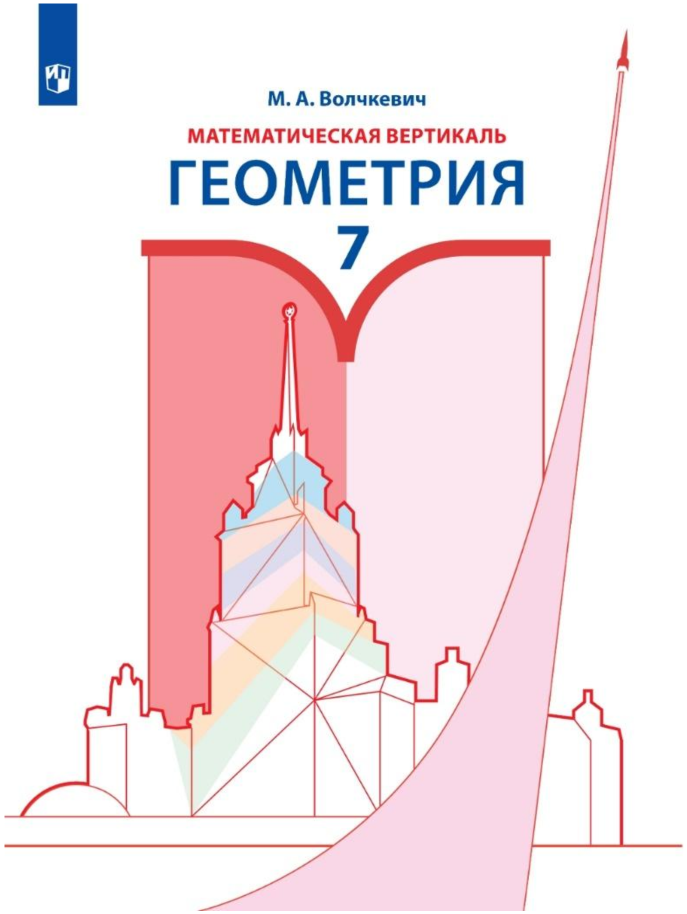

Геометрия
7
8
9


ГЕОМЕТРИЯ
7
А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков
вентана граф


ГЕОМЕТРИЯ
8
А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков
Углублённый уровень


Углублённый уровень
ГЕОМЕТРИЯ
9
А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков
вентана граф


М. А. Волчкевич
Уроки геометрии в задачах
7–8 классы


М. А. Волчкевич
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ
ГЕОМЕТРИЯ
7