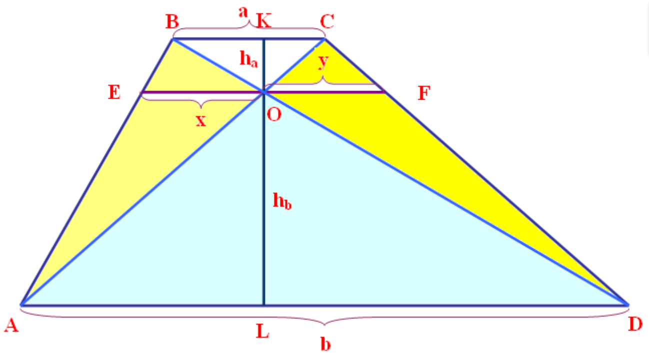
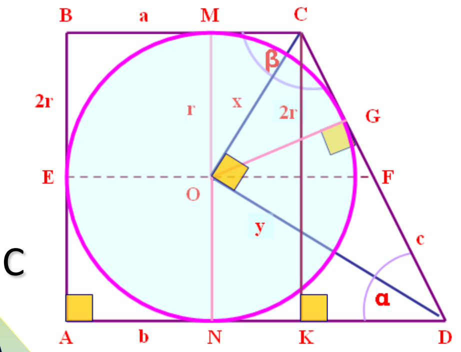
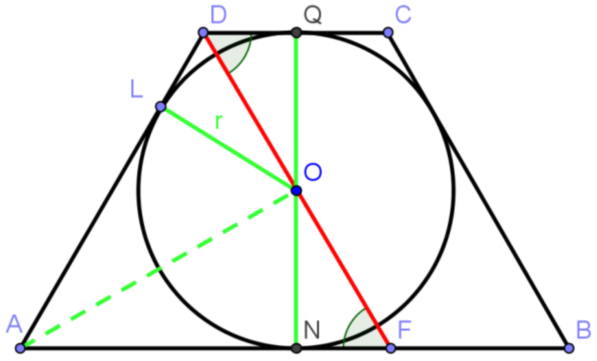
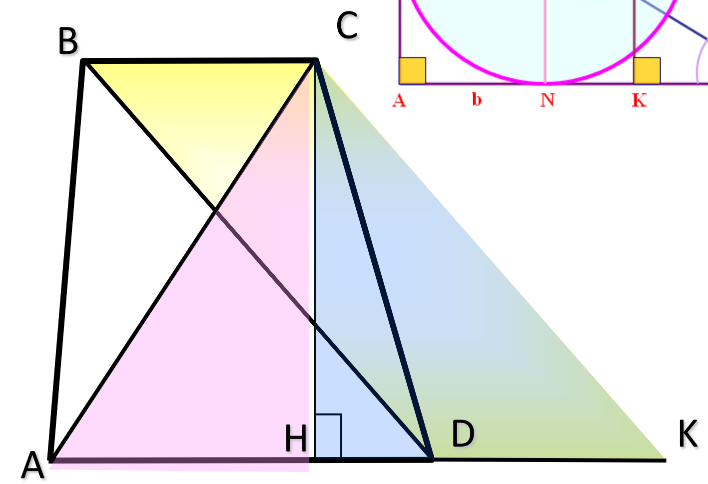
Дополнительные построения в трапеции



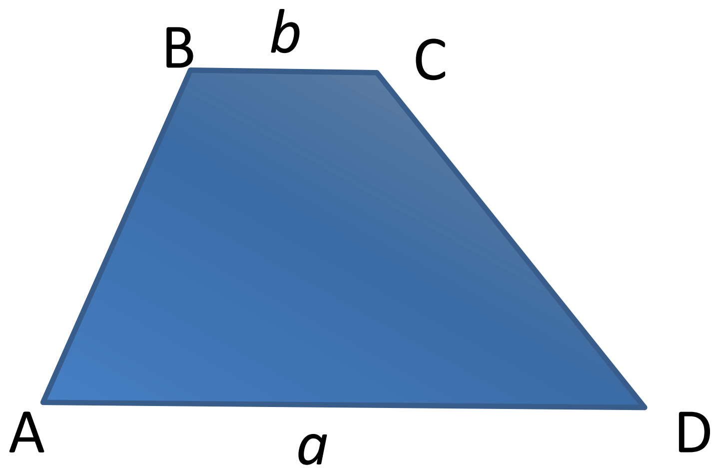


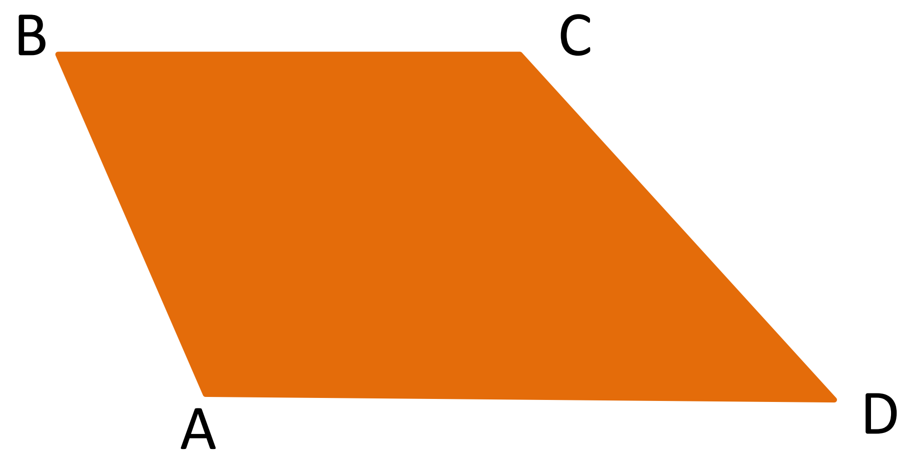




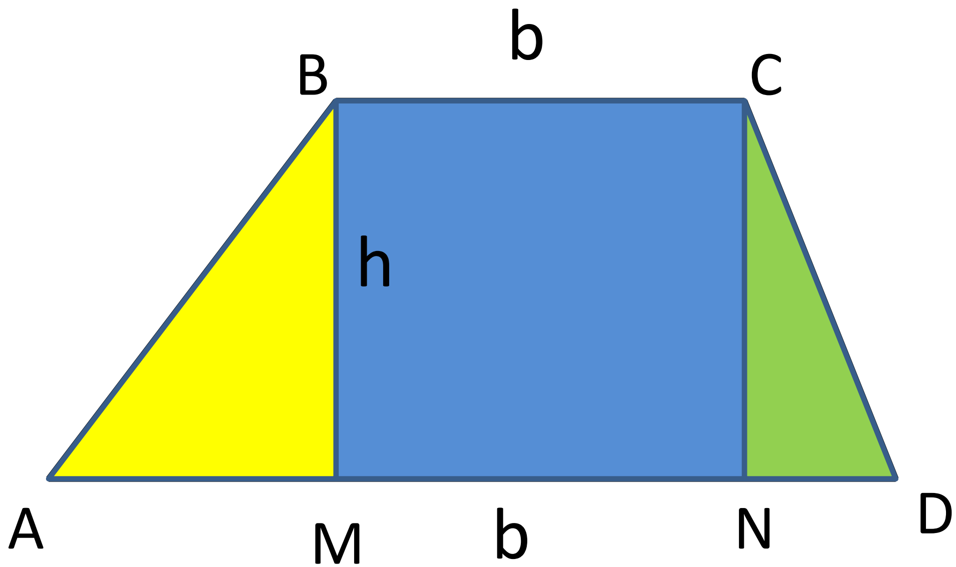
МЕЩАНИНОВА ОЛЬГА ОЛЕГОВНА,
УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ ЛИЦЕЯ № 2
Г. РЫБИНСК

Трапеция – четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие не параллельны. Параллельные стороны **трапеции** называются основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами.

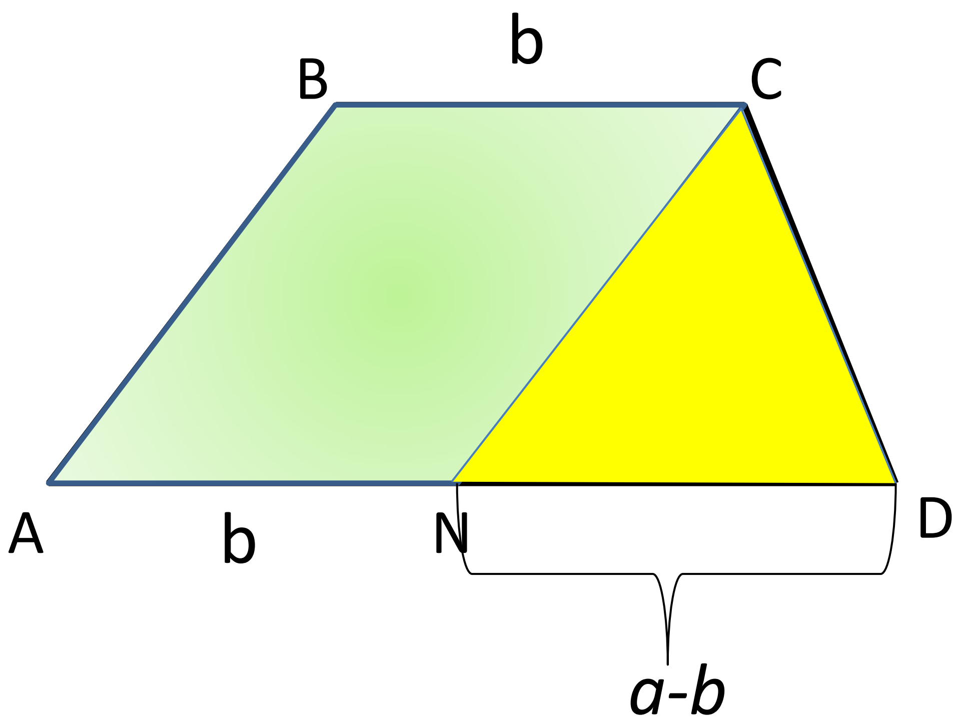




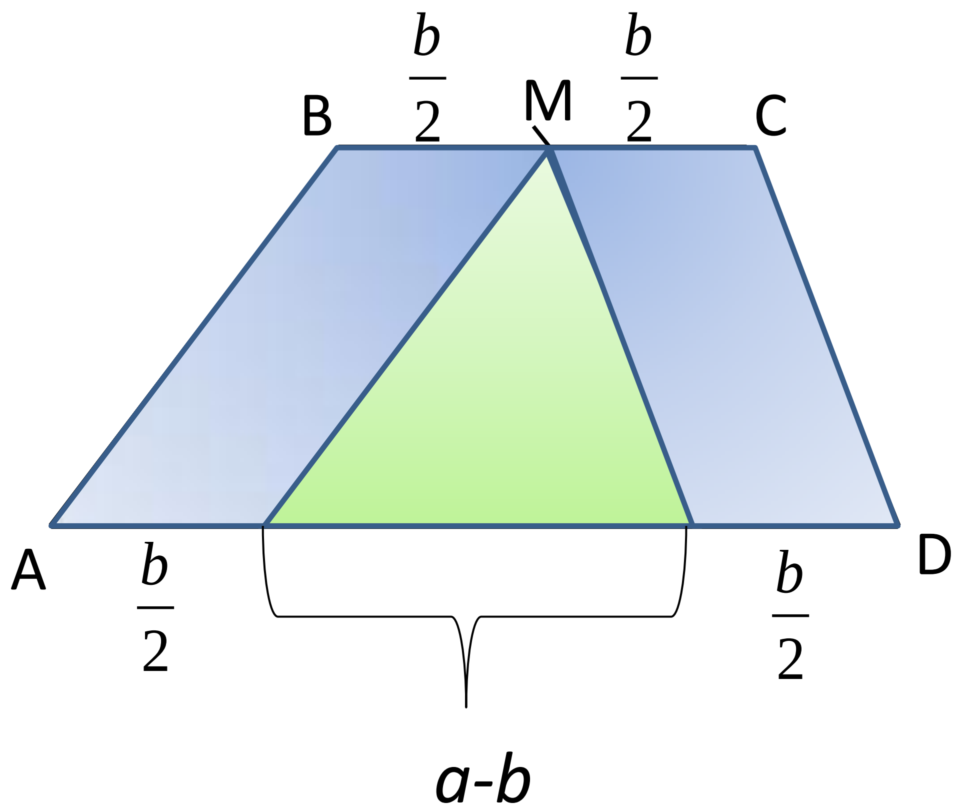
Проводим высоты трапеции из вершин меньшего основания



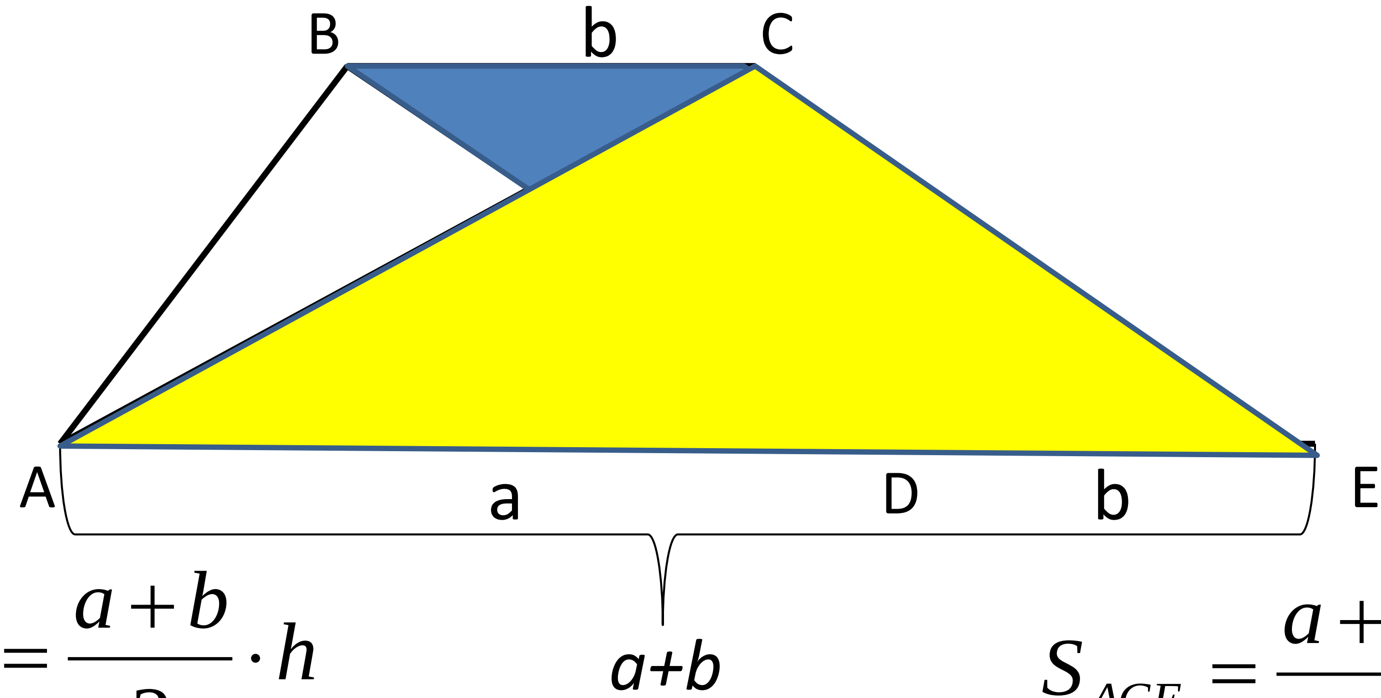
Через вершину верхнего основания проводим прямую, параллельно боковой стороне трапеции до пересечения с большим основанием.



Через середину меньшего основания параллельно боковым сторонам проводим отрезки до пересечения с большим основанием



Через вершину меньшего основания параллельно диагонали проводим отрезок до пересечения с продолжением большего основания

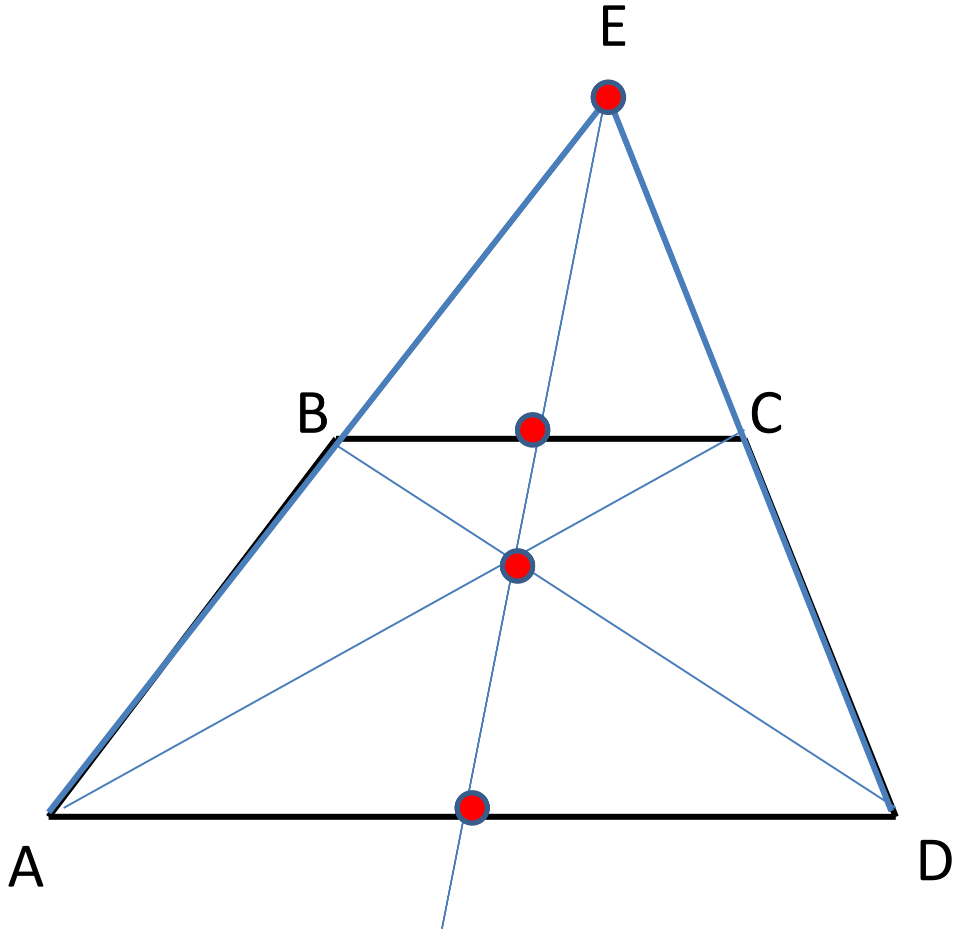


$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S_{ACE} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

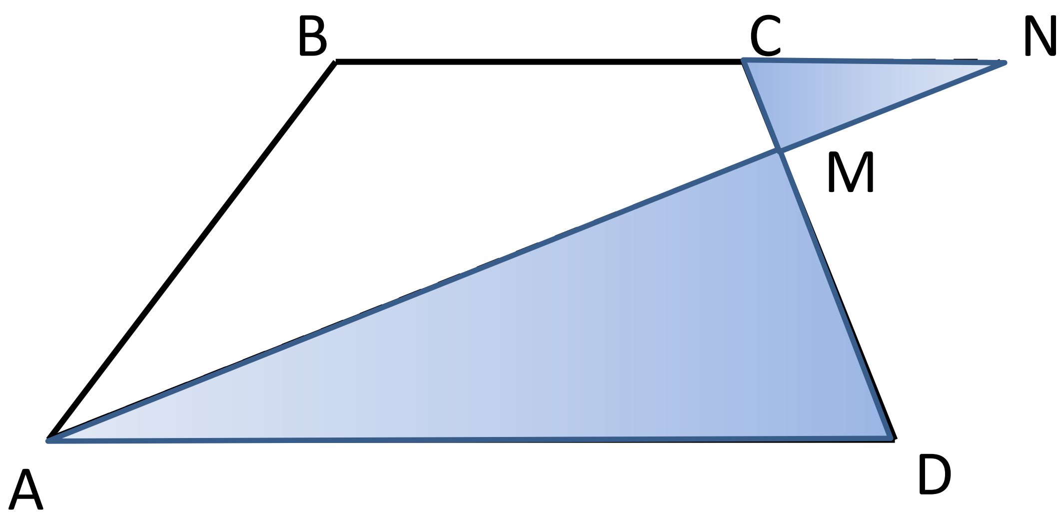
$$S_{ABCD} = S_{ACE}$$

Продолжаем боковые стороны до пересечения



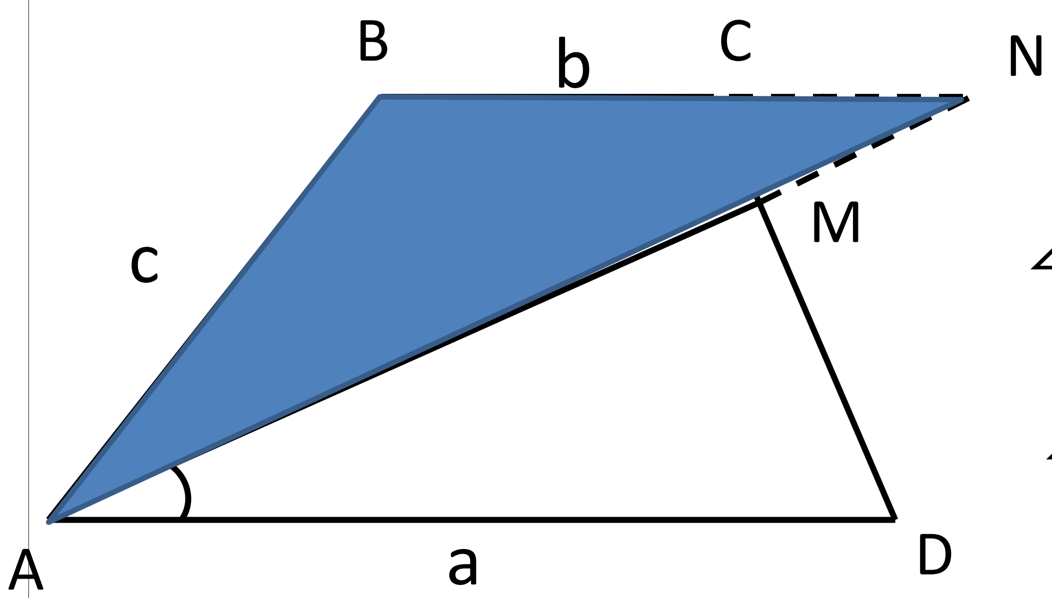
$\Delta AED \sim \Delta BEC$

Продолжаем отрезок до пересечения с продолжением меньшего основания



$$\Delta\, CMN \sim \Delta\, AMD$$

Продолжаем биссектрису до пересечения с продолжением меньшего основания



$$\angle BAM = \angle MAD$$

$$\angle MAD = \angle BNA$$

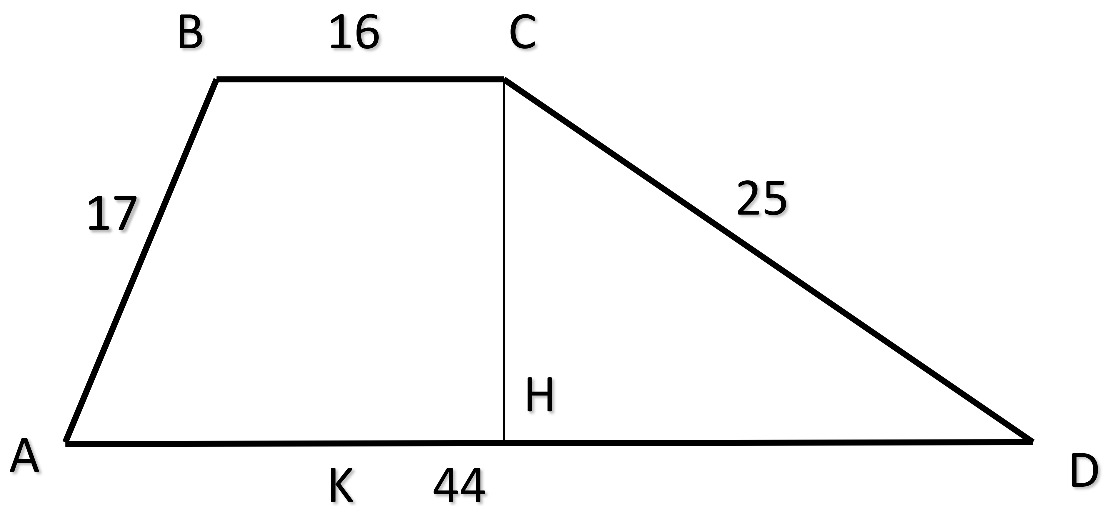
CN= c-b

$$\frac{MC}{MD} = \frac{CN}{AD} = \frac{c-b}{a}$$

Δ *CMN~* Δ *AMD*

Тренировочные задачи

Задача 1 Найдите площадь трапеции параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные – 17 и 25



$$S_{KCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{17+25+28}{2} = 35$$

$$S_{KCD} = \sqrt{35(35-17)(35-25)(35-28)} = 210$$

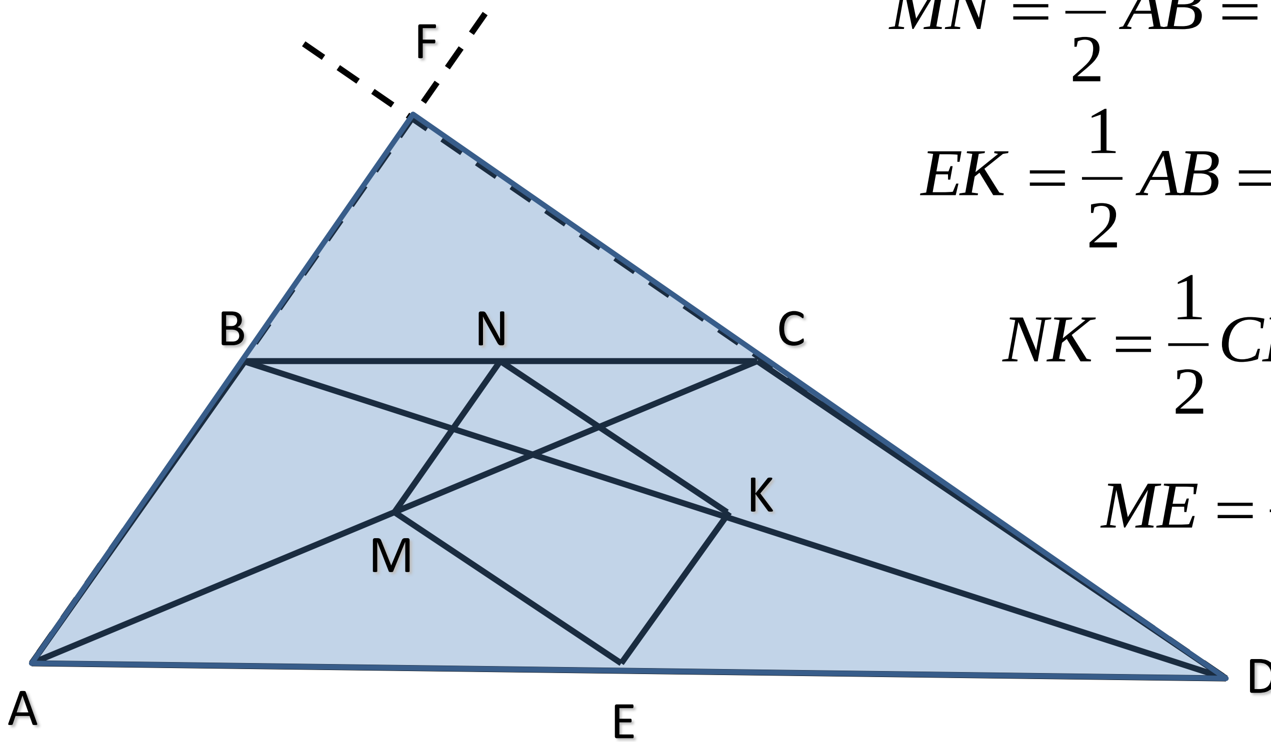
$$S_{KCD} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot 28 = 14 \cdot CH$$

$$14 \cdot CH = 210, CH = 15$$

$$S_{ABCD} = \frac{16+44}{2} \cdot 15 = 450$$

Задача 2 В трапеции ABCD

$\angle A = 53^\circ, \angle D = 37^\circ, AB = 4, CD = 6$ Найти площадь четырехугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований трапеции.



$$MN = \frac{1}{2}AB = 2$$

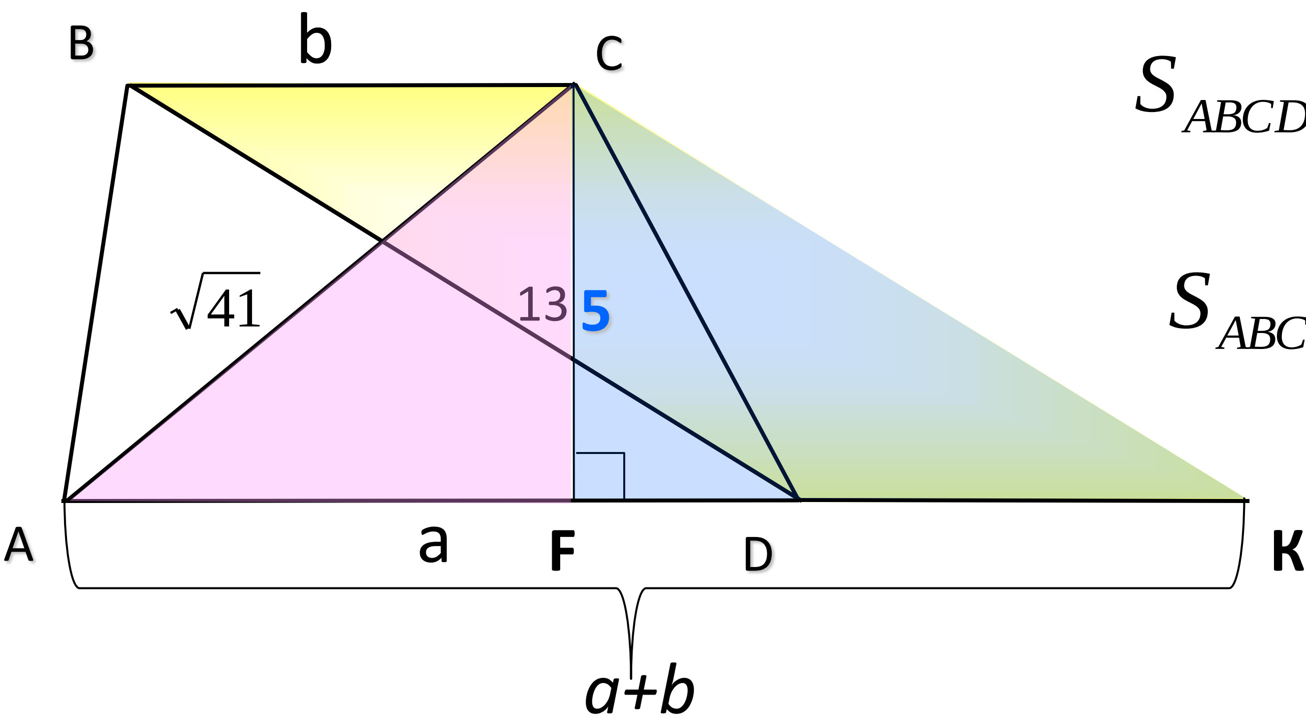
$$EK = \frac{1}{2}AB = 2$$

$$NK = \frac{1}{2}CD = 3$$

$$ME = \frac{1}{2}CD = 3$$

$$S = 2 \cdot 3 = 6$$

Задача 3 Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.



$$S_{ABCD} = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

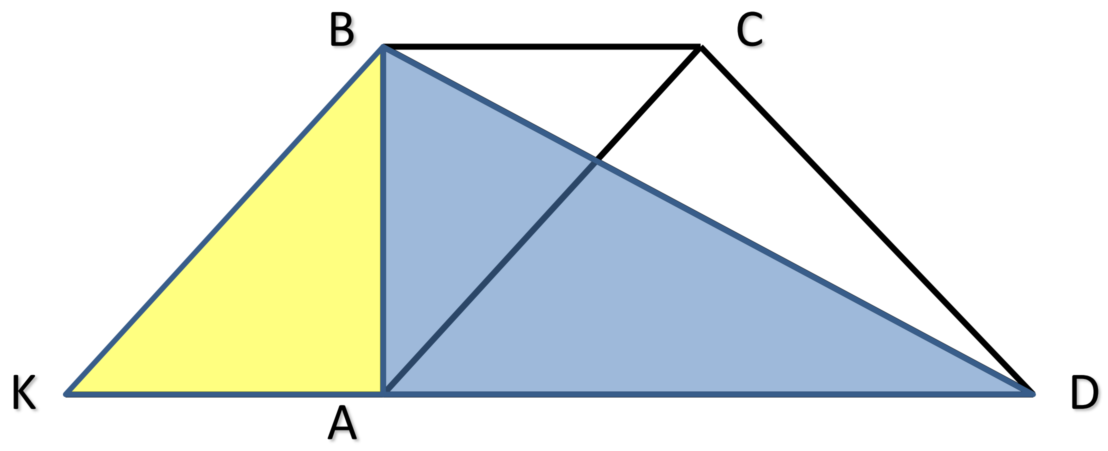
$$S_{ABCD} = \frac{16}{2} \cdot 5 = 40$$

$$AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \sqrt{41 - 25} = \sqrt{16} = 4$$

$$FK = \sqrt{CK^2 - CF^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

$$a + b = AF + FK = 4 + 12 = 16$$

Задача 4 Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.



$$AD = a$$
$$BC = b$$
$$BD = d_1$$
$$AC = d_2$$

$$AB^2 = {d_1}^2 - a^2 \qquad {d_1}^2 - a^2 = {d_2}^2 - b^2$$

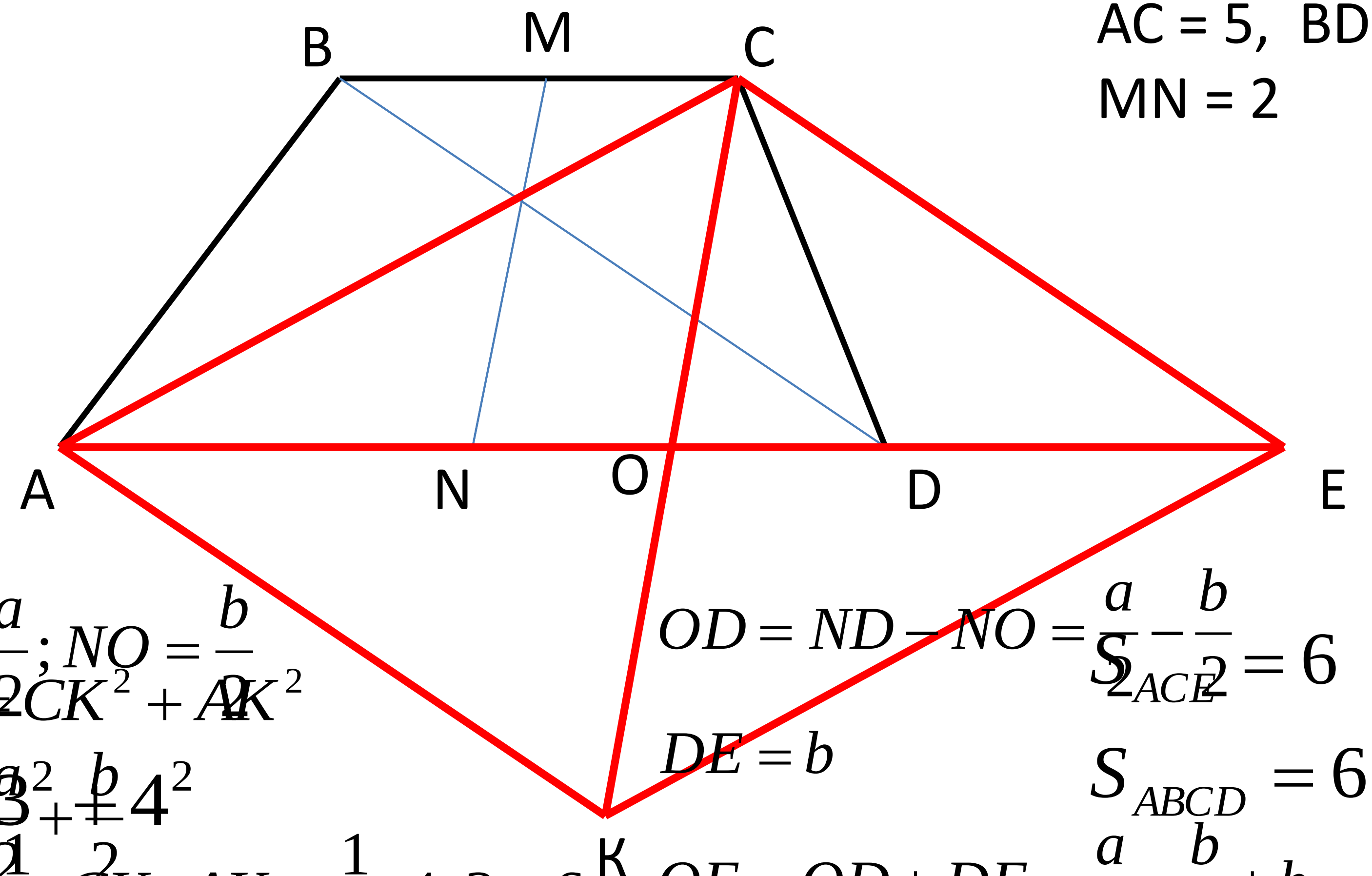
$$AB^2 = {d_2}^2 - b^2 \qquad {d_1}^2 - {d_2}^2 = a^2 - b^2$$

Задачи ЕГЭ

Задача 5 Диагонали трапеции равны 3 и 5. Отрезок, соединяющий середины оснований равен 2. Найдите площадь трапеции.

$AC = 5,\ BD = 3$

$MN = 2$



$AN = \dfrac{a}{2};\ NO = \dfrac{b}{2}$

$AC^2 = CK^2 + AK^2$

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$AO = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$

$S_{ACK} = \dfrac{1}{2} \cdot CK \cdot AK = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

O- середина AE

$OD = ND - NO = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}$

$DE = b$

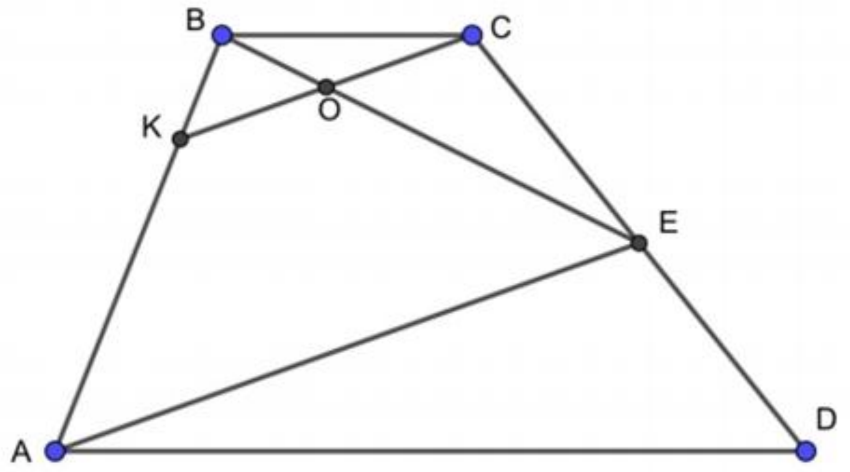
$OE = OD + DE = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} + b = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$

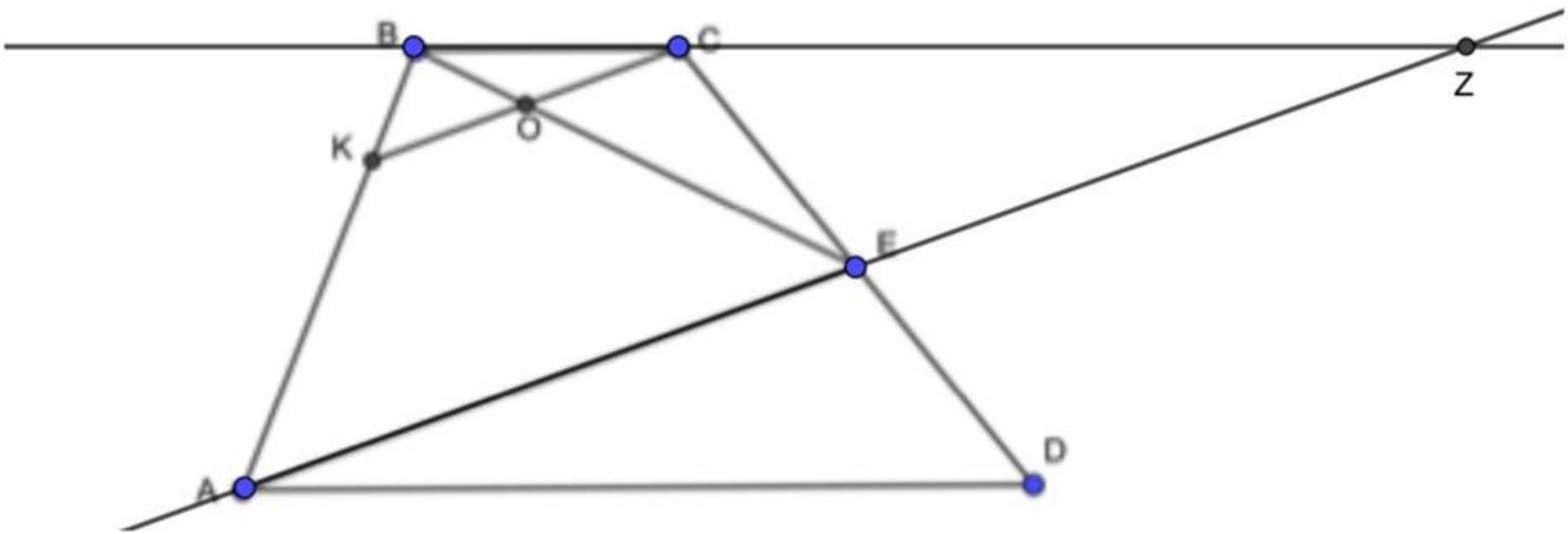
$S_{ACE} = 6$

$S_{ABCD} = 6$

Задача 6

- Пример (из открытого банка заданий ЕГЭ ФИПИ) Точка E — середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O. а) Докажите, что CO=KO. б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет 9/100 площади трапеции ABCD.


B
C
O
K
E
A
D

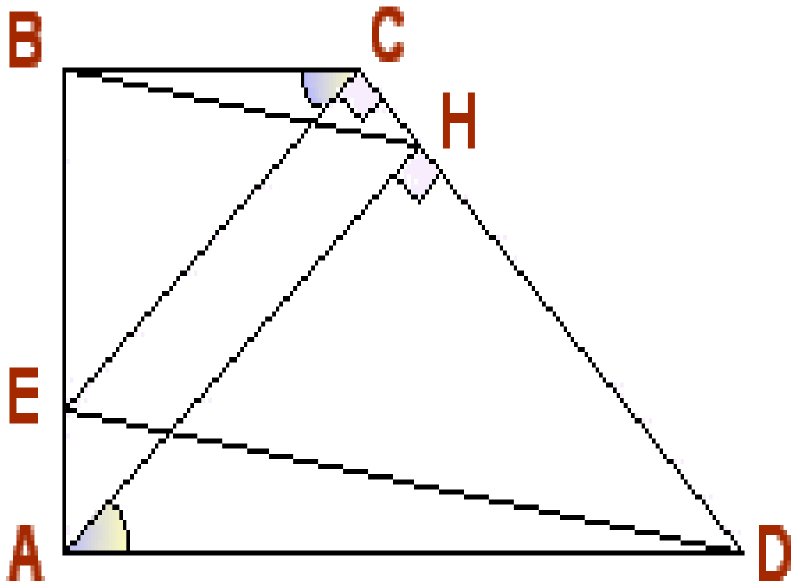

B
C
Z
K
O
E
D
A

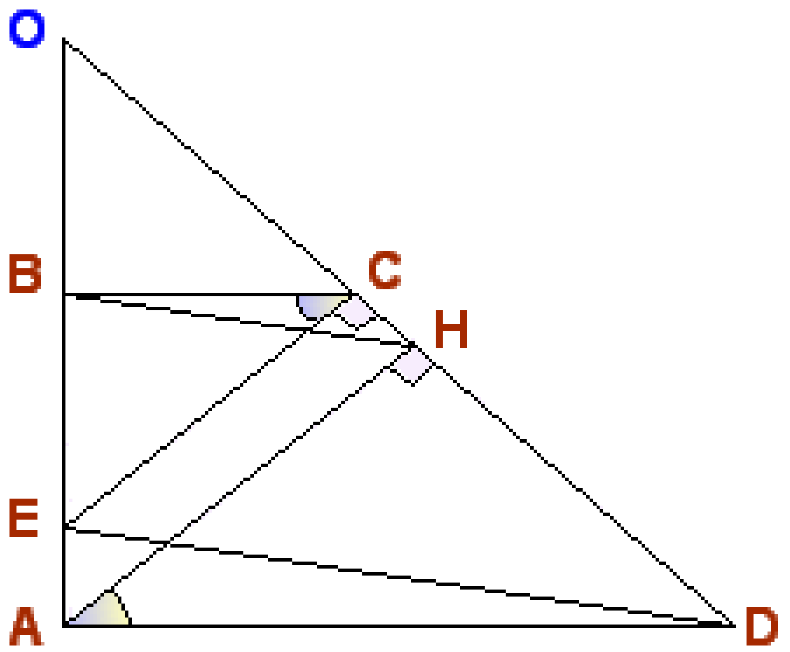
- Продлеваем BC и AE, вследствие чего появляются равные треугольники AED и ZEC. Так как AE=EZ, то BE — это медиана треугольника ABZ. KC и AZ параллельны. Медиана хороша тем, что она делит пополам не только сторону треугольника, но и любой отрезок, который этой стороне параллелен. Поэтому CO=KO. Площадь треугольника ABZ такая же, как площадь трапеции ABCD за счет равенства треугольников AED и ZEC. Треугольник KBC подобен треугольнику ABZ. Как известно, отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отрезок BC, деленый на отрезок BZ, равен 3:10. На отрезок CZ приходится 7 частей. Ответ в пункте «б»: 3:7.

Задача 7

- В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
- б) Найдите отношение BH:ED, если угол BCD=135

- Для пункта «а» необходимо традиционное дополнительное построение, когда боковые стороны трапеции продляются до их пересечения. Пусть это будет точка О (см. рисунок)


B
C
H
E
A
D


O
B
C
H
E
A
D

Ресурсы

- https://for-teacher.ru/edu/matematika/doc-u6ww9r9.html
- file:///C:/Users/User/Downloads/Задачи_26.pdf
- https://dzen.ru/a/Xa2KeeMGLACuXrXH **Эти 5 дополнительных построений решат любую задачу про трапецию**
- https://все конспекты.рф/трапеция
- https://gigabaza.ru/doc/160943.html **Г.И. Ковалева МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ ТРАПЕЦИИ**
- https://2.shkolkovo.online/catalog/2913?SubjectId=1

Спасибо за внимание!