



Государственное автономное учреждение дополнительного профессионального образования
Ярославской области

Институт развития образования

«Секрет от мастера: эффективные практики подготовки к ГИА по математике»

*Иванова С.В., старший преподаватель
кафедры общего образования*



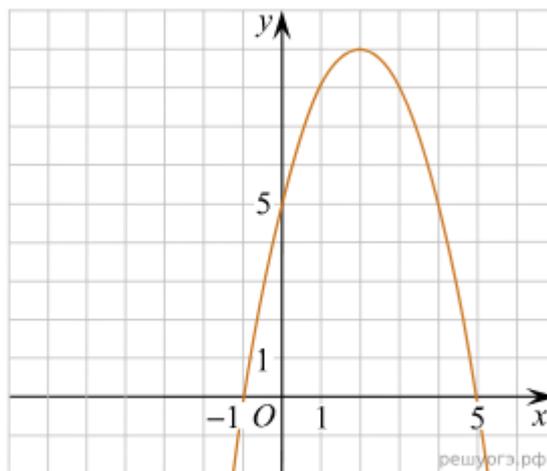


ФУНКЦИИ В ГИА ПО МАТЕМАТИКЕ

ОГЭ

№ 11 – уметь строить и читать графики функций(базовый уровень, 1 балл)

На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.
Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера.



- 1) Функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$
- 2) $f(x) > 0$ при $1 < x < 5$
- 3) $f(0) < f(4)$

ОГЭ

- № 22 - уметь строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели(высокий уровень, 2 балла)

Постройте график функции

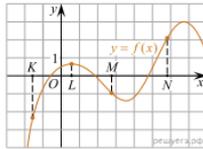
$$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ -1,5x + 1, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ x - 4, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

БАЗА

- № 7 анализ графиков функций

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки K, L, M и N на оси x . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристику функции и её производной.



Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в ней.

- А) K
 Б) L
 В) M
 Г) N

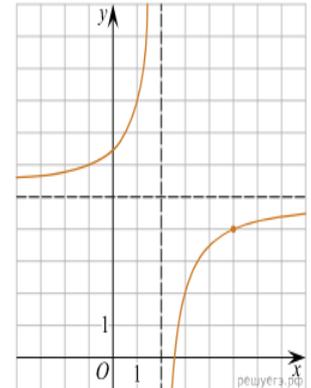
ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ ИЛИ ПРОИЗВОДНОЙ

- 1) функция положительна, производная положительна
- 2) функция отрицательна, производная отрицательна
- 3) функция положительна, производная равна 0
- 4) функция отрицательна, производная положительна

ПРОФИЛЬ

- № 10 - уметь строить, читать и анализировать графики функций, уметь применять преобразования графиков

3. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите a .

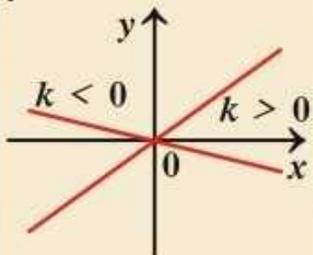


Базовые знания

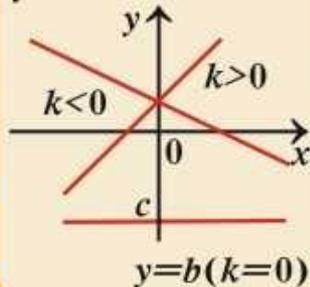
- Графики элементарных функций
- Построение графиков с помощью преобразований
- Зависимость коэффициентов
- Построение графиков с модулем
- Построение графиков кусочно-заданной функции

ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

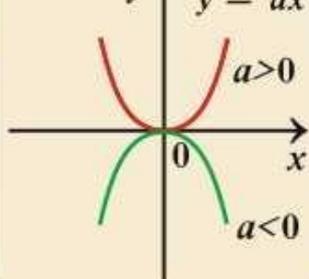
$$y = kx$$



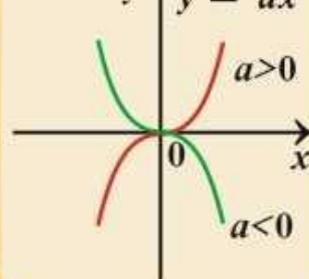
$$y = kx + b$$



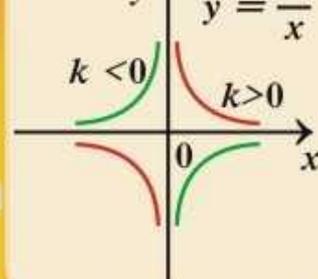
$$y = ax^2$$



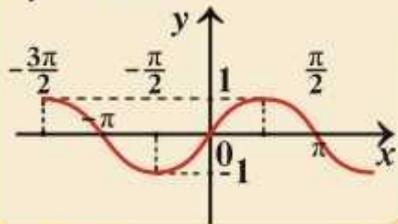
$$y = ax^3$$



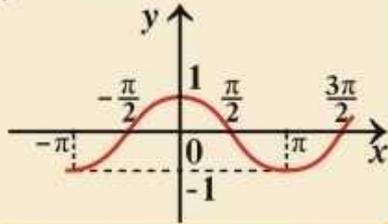
$$y = \frac{k}{x}$$



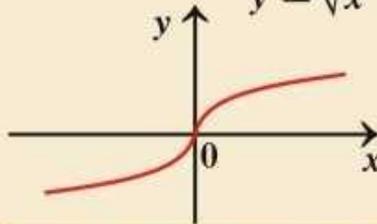
$$y = \sin x$$



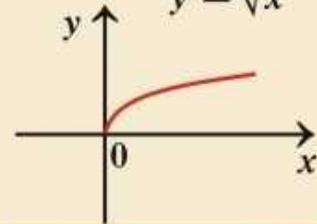
$$y = \cos x$$



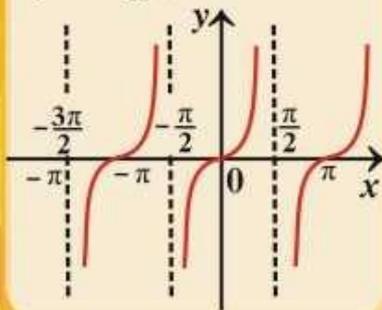
$$y = \sqrt[3]{x}$$



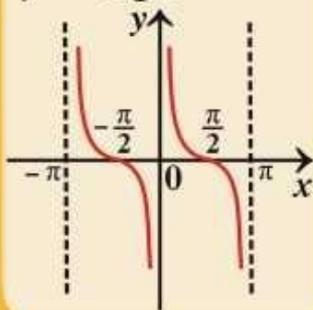
$$y = \sqrt{x}$$



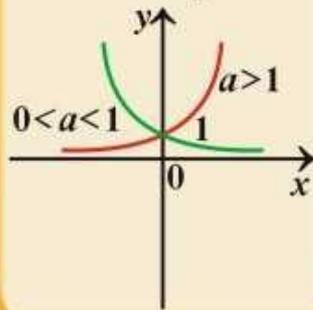
$$y = \operatorname{tg} x$$



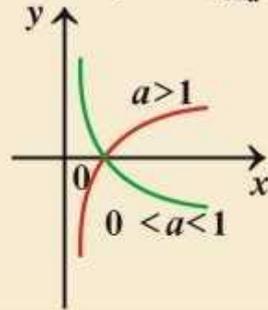
$$y = \operatorname{ctg} x$$



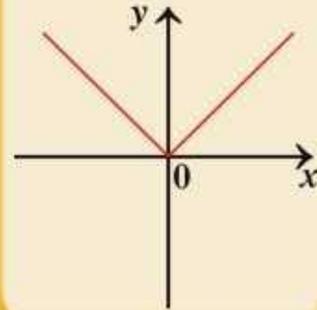
$$y = a^x$$



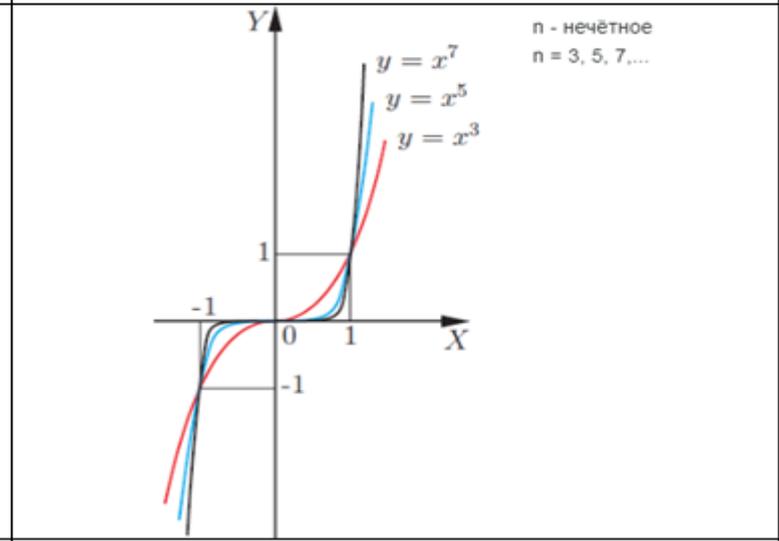
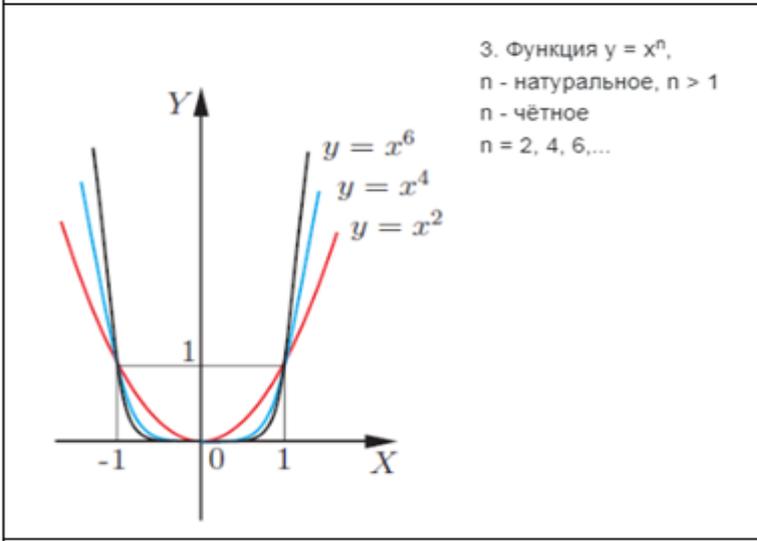
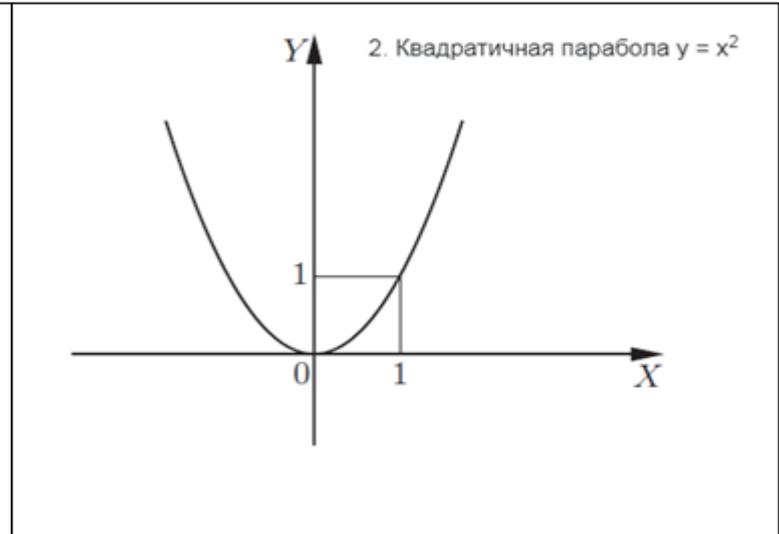
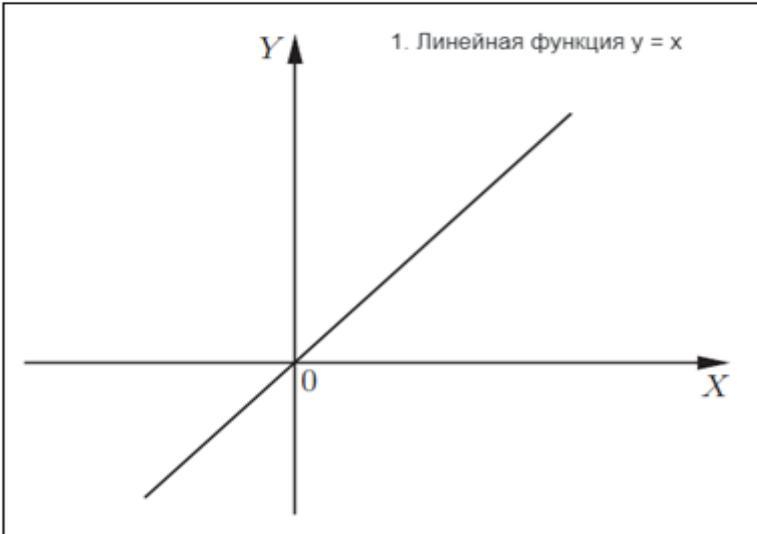
$$y = \log_a x$$



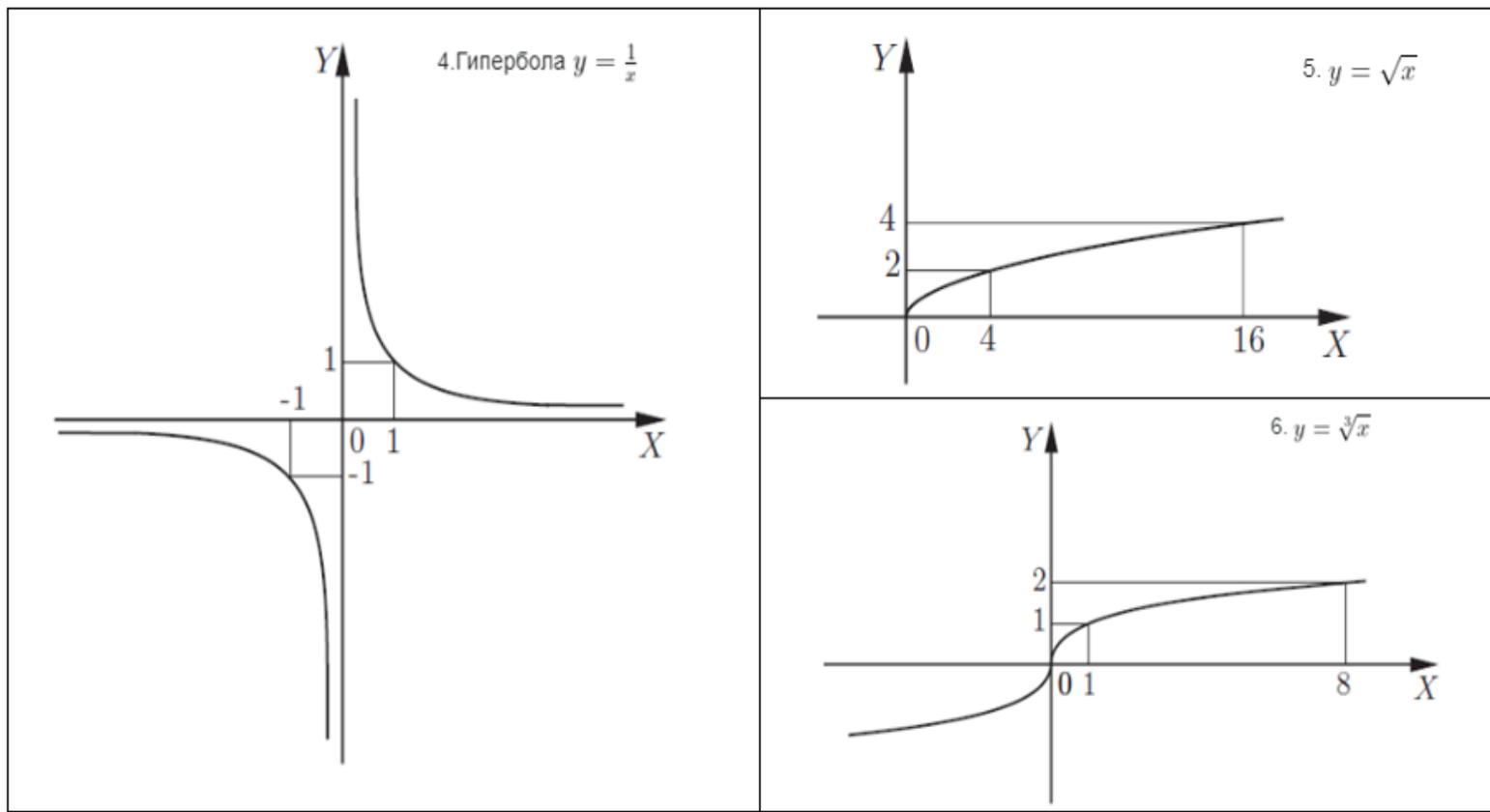
$$y = |x|$$



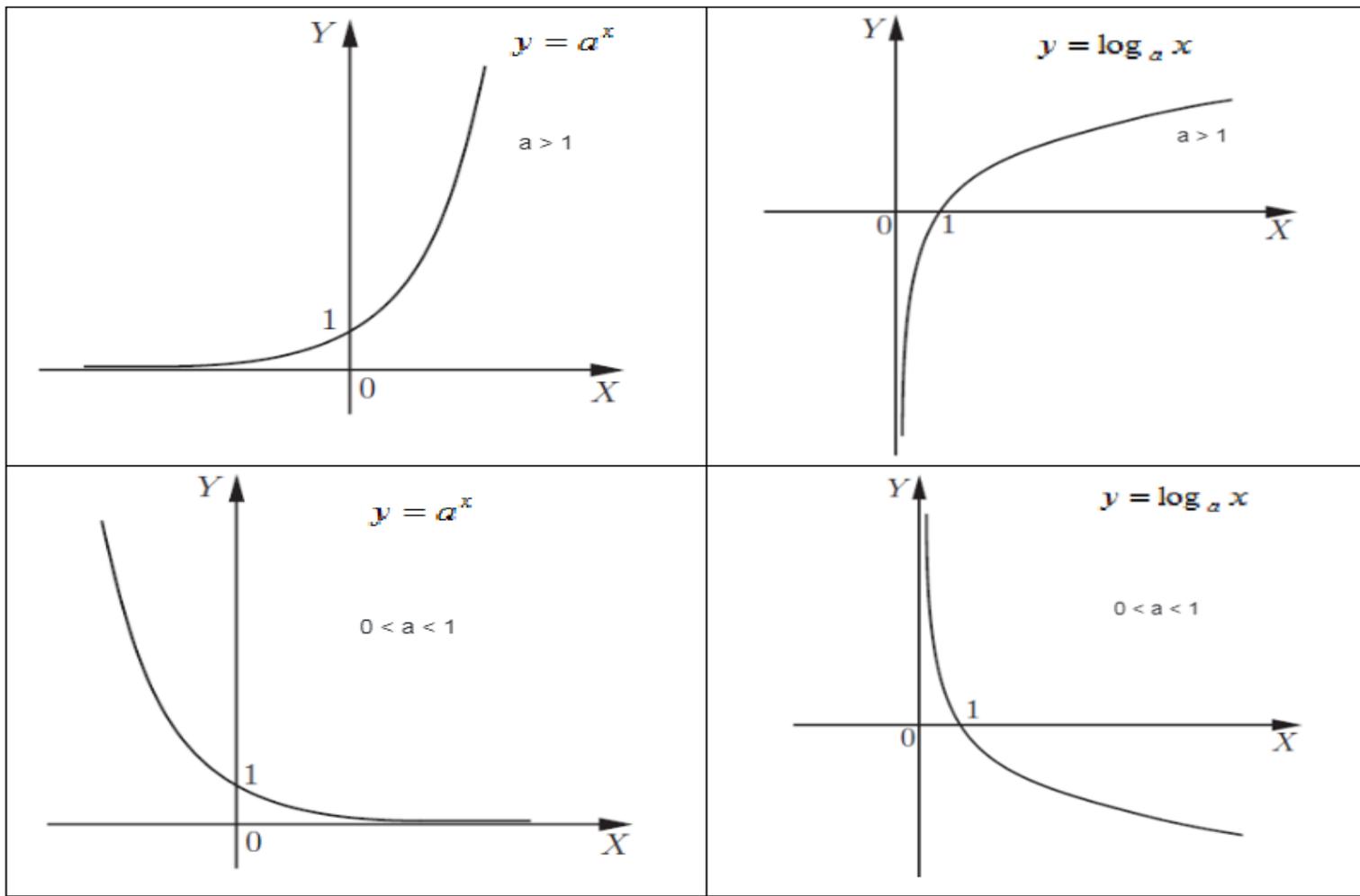
Элементарные функции



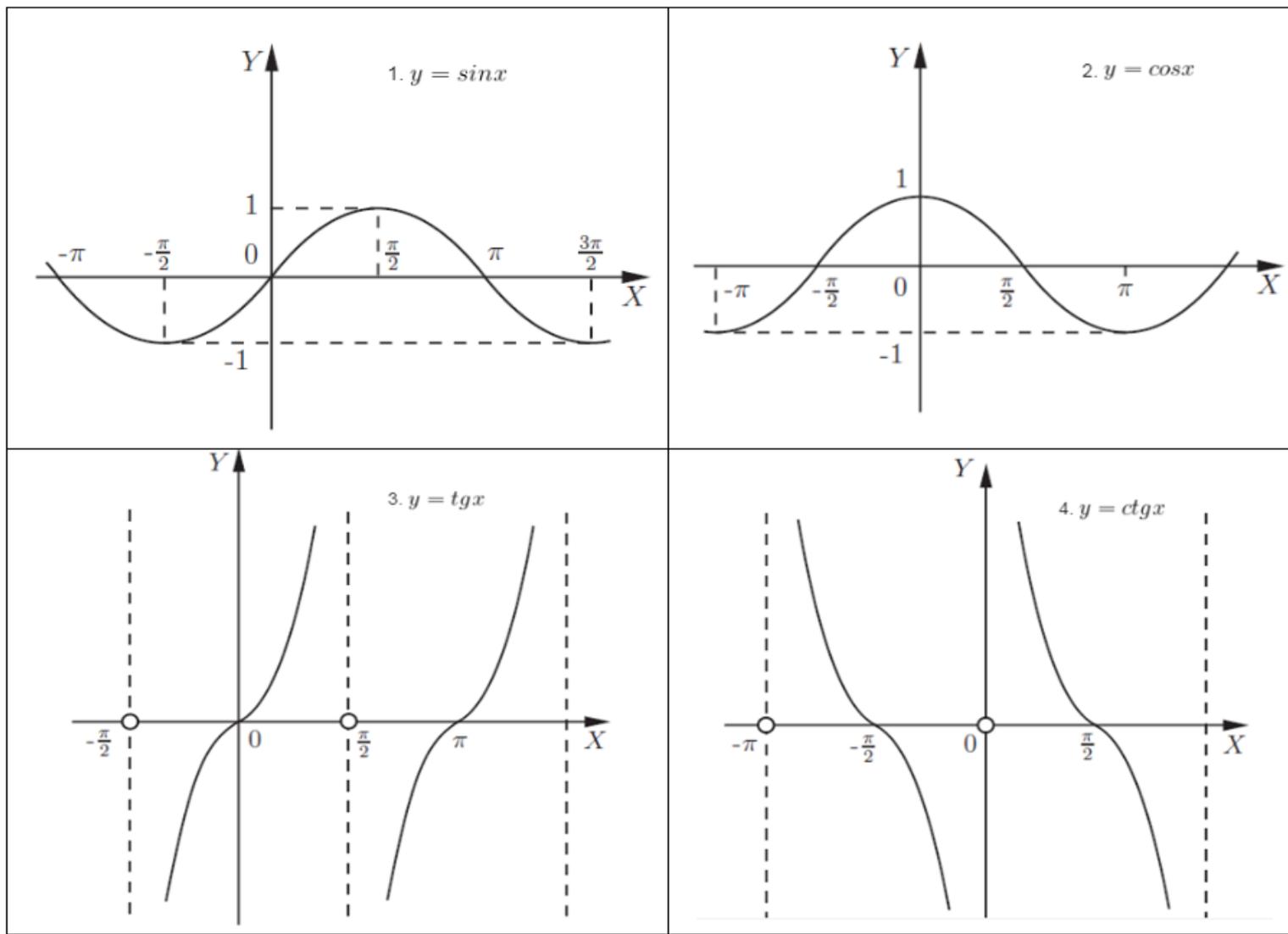
Элементарные функции



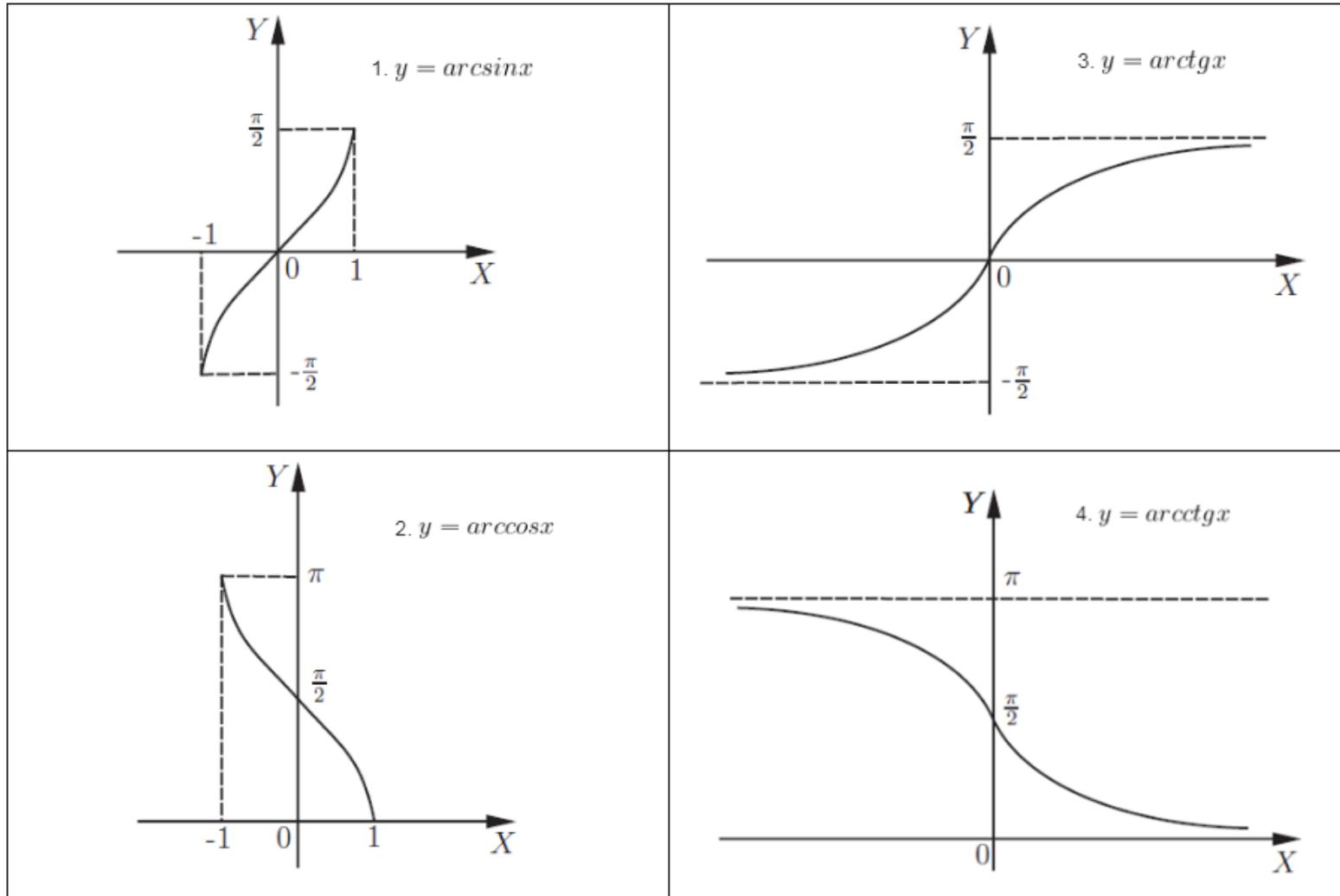
Показательная и логарифмическая функции

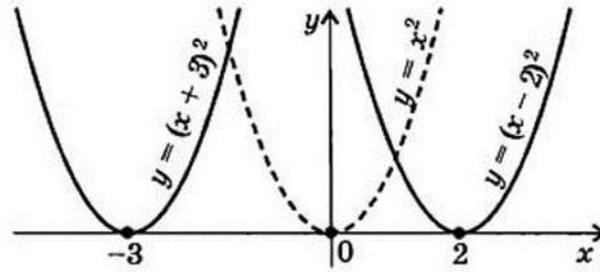
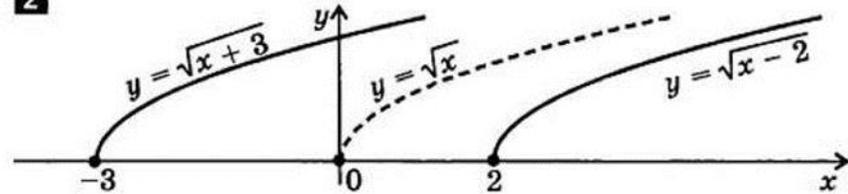
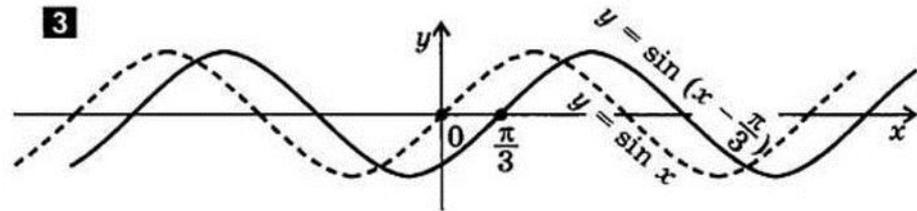


Тригонометрические функции



Обратные тригонометрические функции

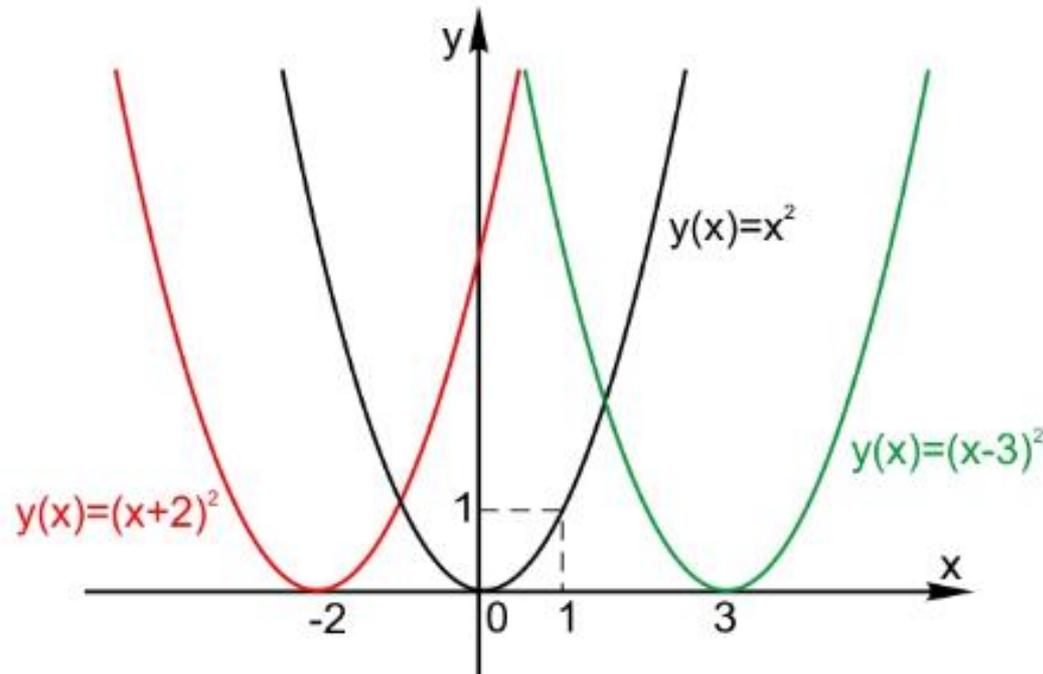


1**2****3**

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

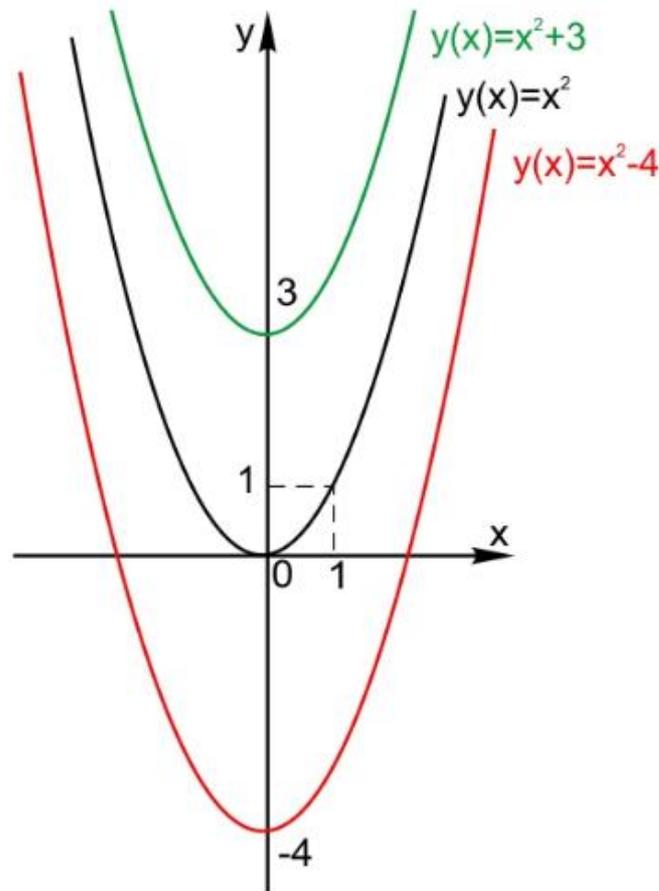
Сдвиг по горизонтали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$. Тогда график функции $y = f(x - m)$ сдвинут относительно исходного на m вправо. График функции $y = f(x + m)$ сдвинут относительно исходной на m влево.



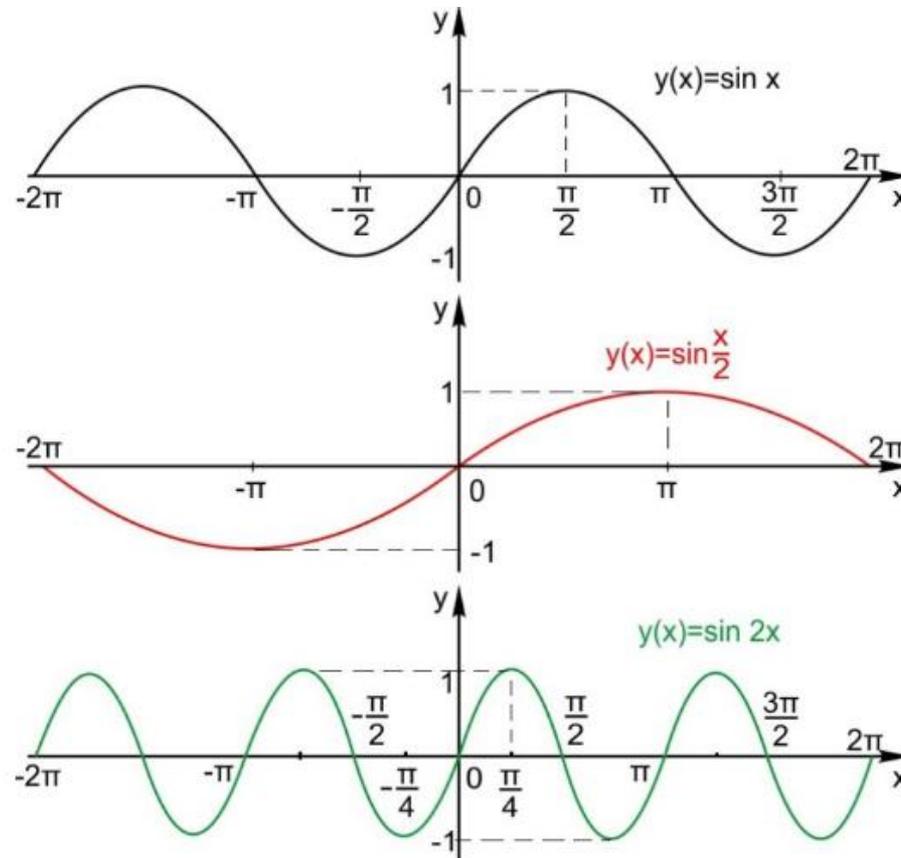
Сдвиг по вертикали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$ и C — некоторое положительное число. Тогда график функции $y = f(x) + n$ сдвинут относительно исходного **на n вверх**. График функции $y = f(x) - n$ сдвинут относительно исходного **на n вниз**.



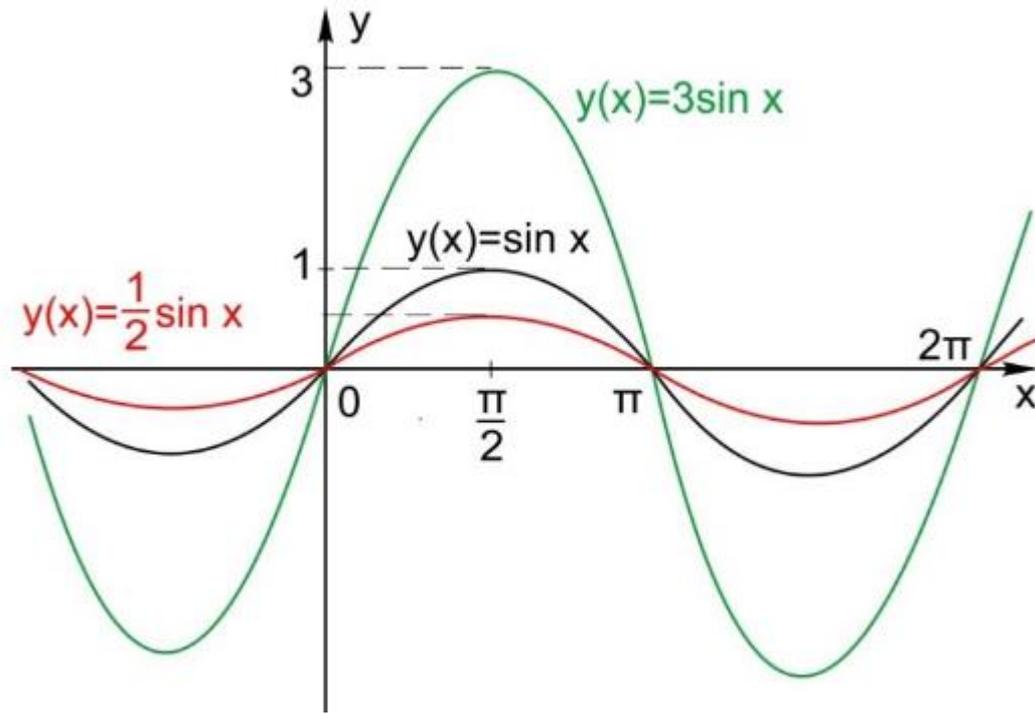
Растяжение (сжатие) по горизонтали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k > 0$. Тогда график функции $y = f(kx)$ растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0 < k < 1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k > 1$.



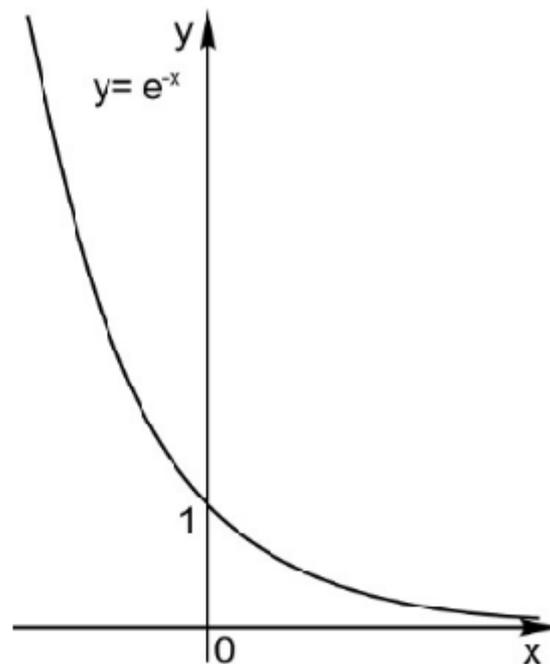
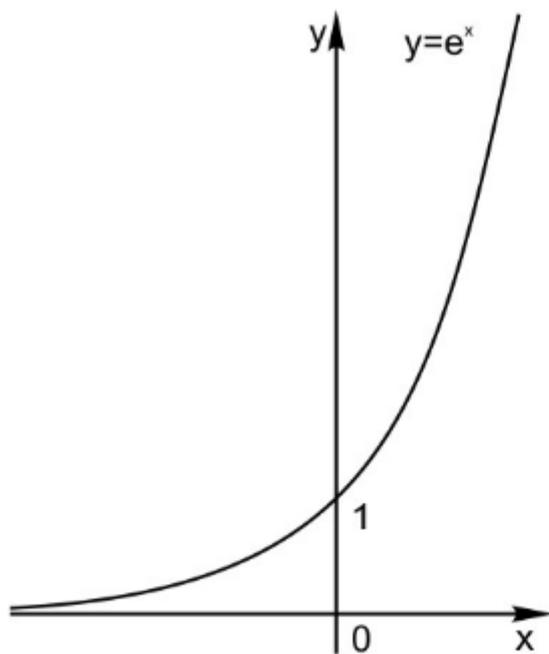
Растяжение (сжатие) по вертикали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $M > 0$. Тогда график функции $y = M \cdot f(x)$ **растянут** относительно исходного в M раз по вертикали, если $M > 1$, и **сжат** относительно исходного в M раз по вертикали, если $0 < M < 1$.



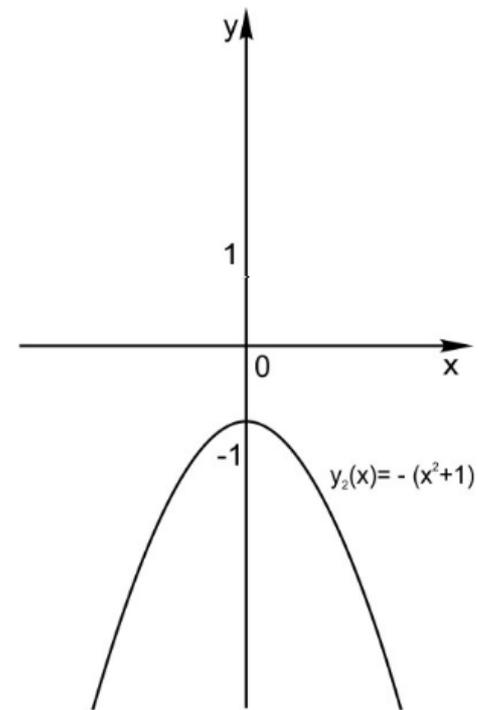
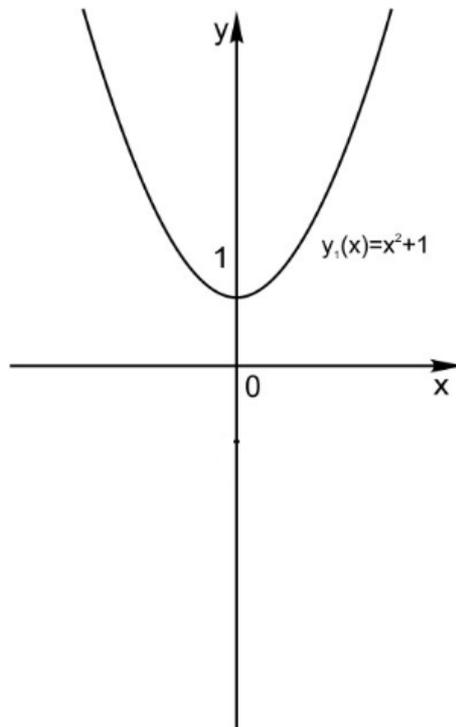
Отражение по горизонтали

График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Y .

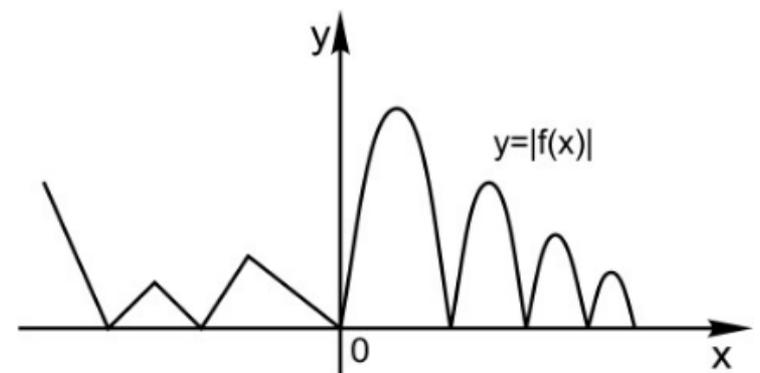
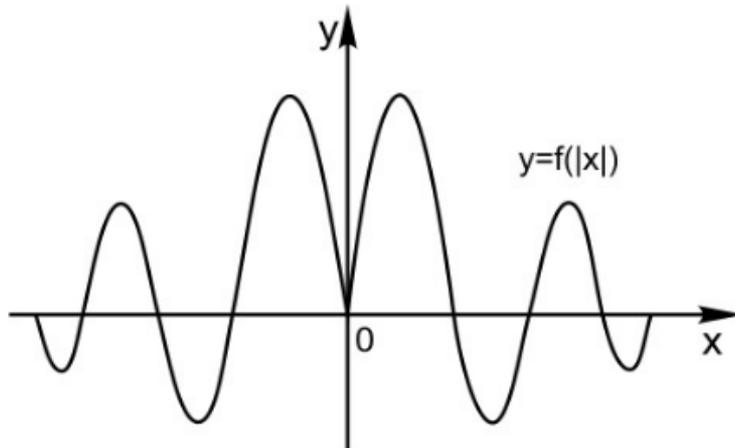
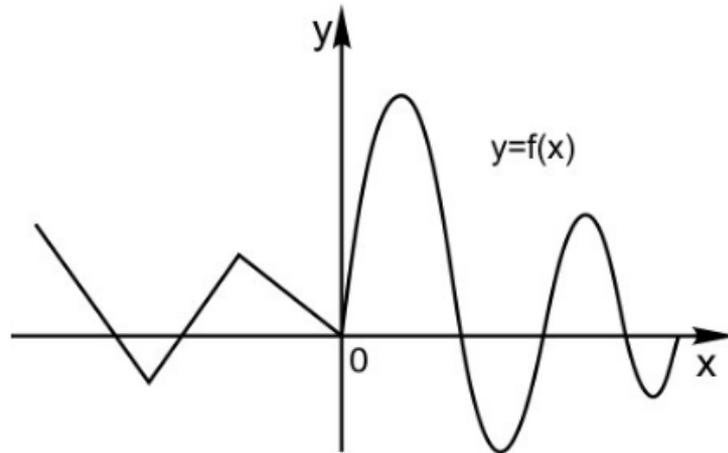


Отражение по вертикали

График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси X .

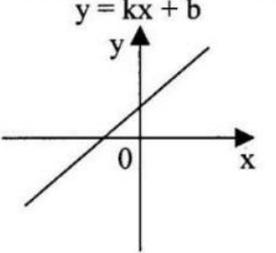
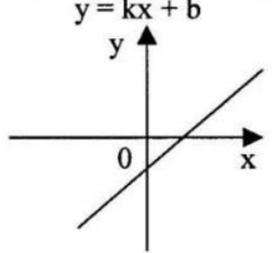
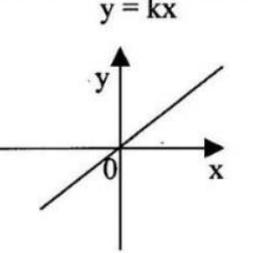
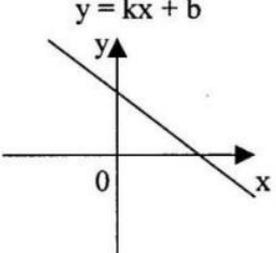
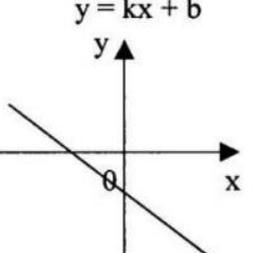
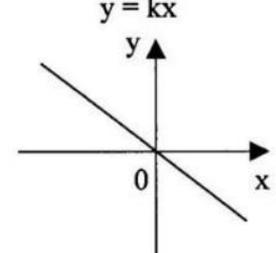
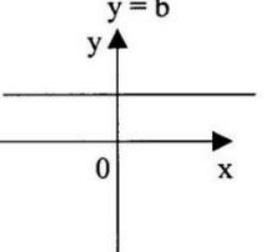
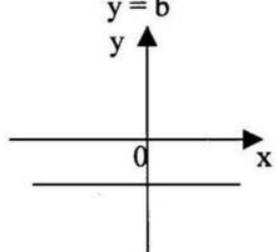
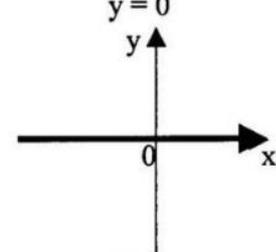


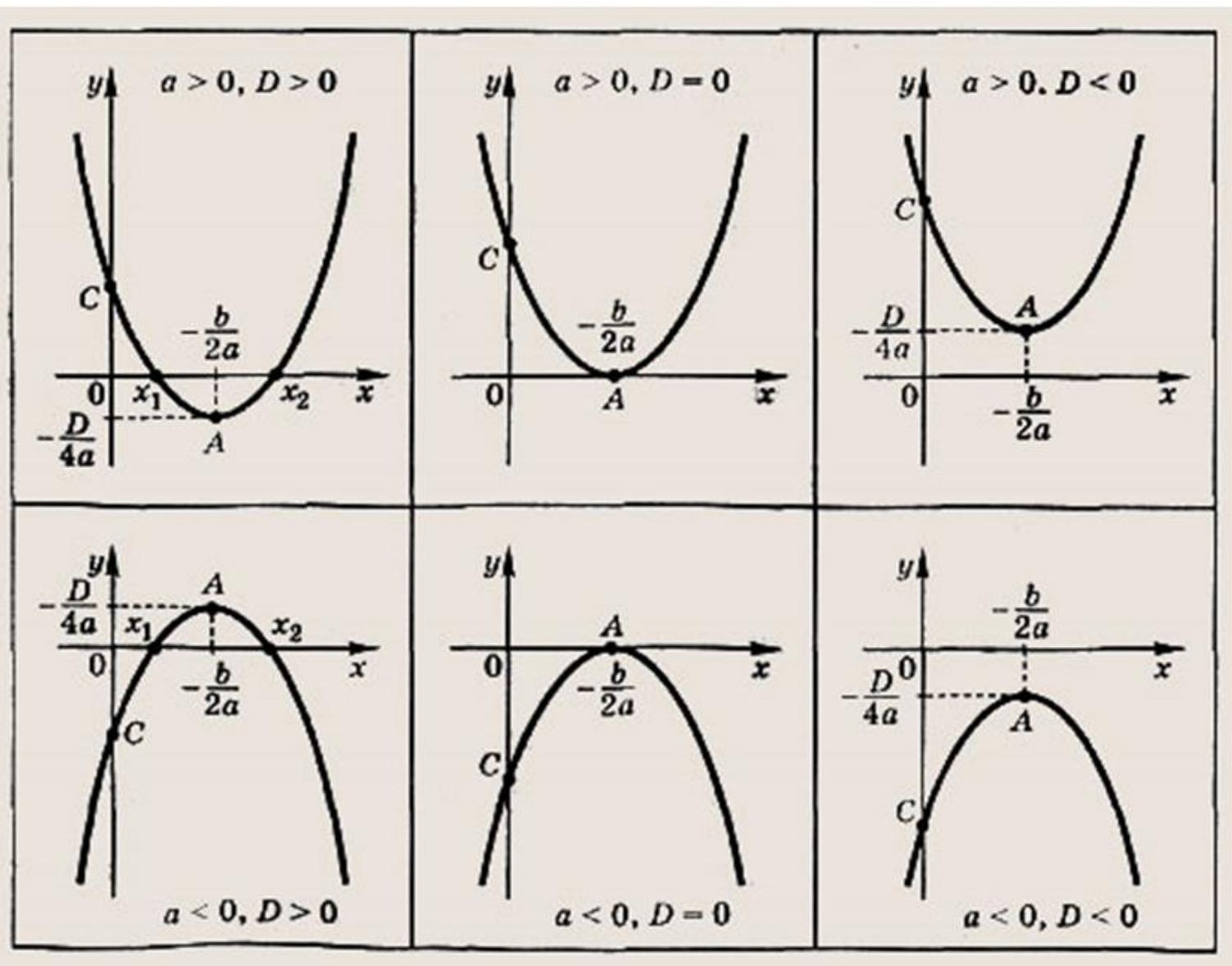
Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$



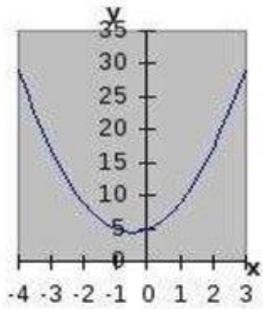
ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Таблица .
 Положение графика функции $y = kx + b$ в зависимости от k и b .

b k	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
$k > 0$	$y = kx + b$ 	$y = kx + b$ 	$y = kx$ 
$k < 0$	$y = kx + b$ 	$y = kx + b$ 	$y = kx$ 
$k = 0$	$y = b$ 	$y = b$ 	$y = 0$ 

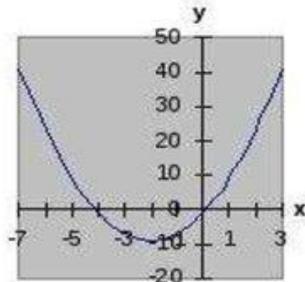


$a > 0, b > 0, c > 0$



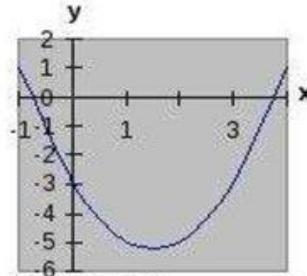
$b = 0, c > 0$

$a > 0, b > 0, c < 0$



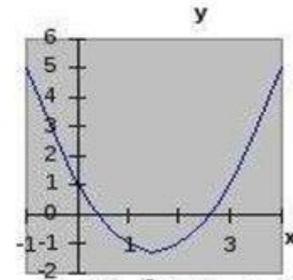
$b = 0, c < 0$

$a > 0, b < 0, c < 0$

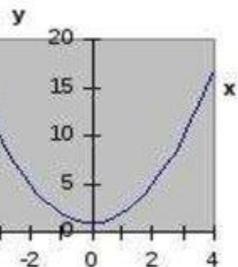
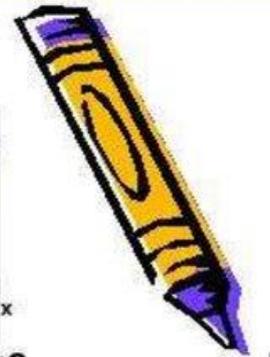


$a < 0, b > 0, c > 0$

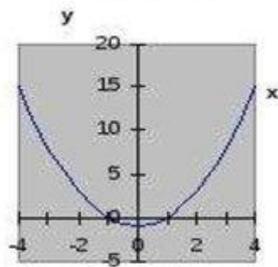
$a > 0, b < 0, c > 0$



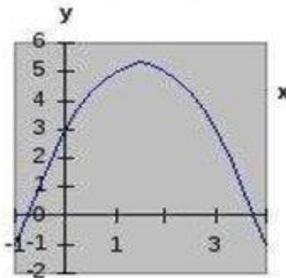
$a < 0, b > 0, c < 0$



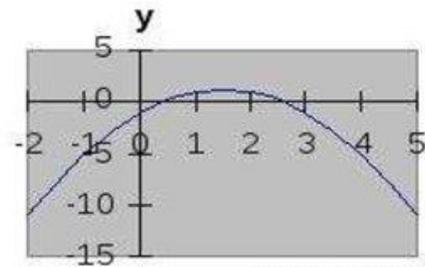
$a < 0, b < 0, c > 0$



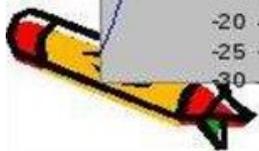
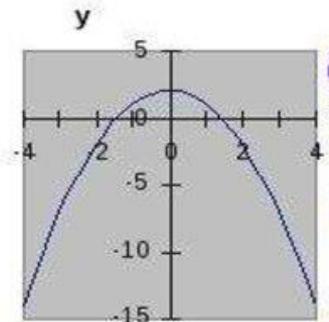
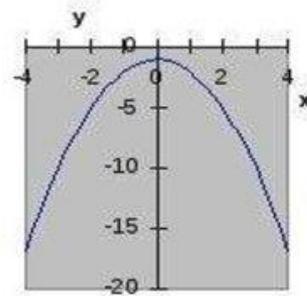
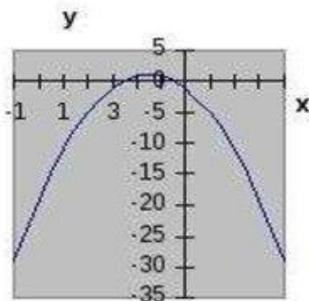
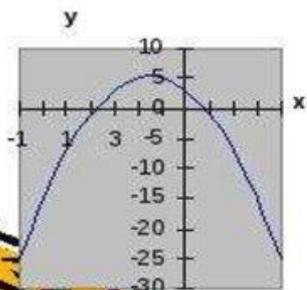
$a < 0, b < 0, c < 0$

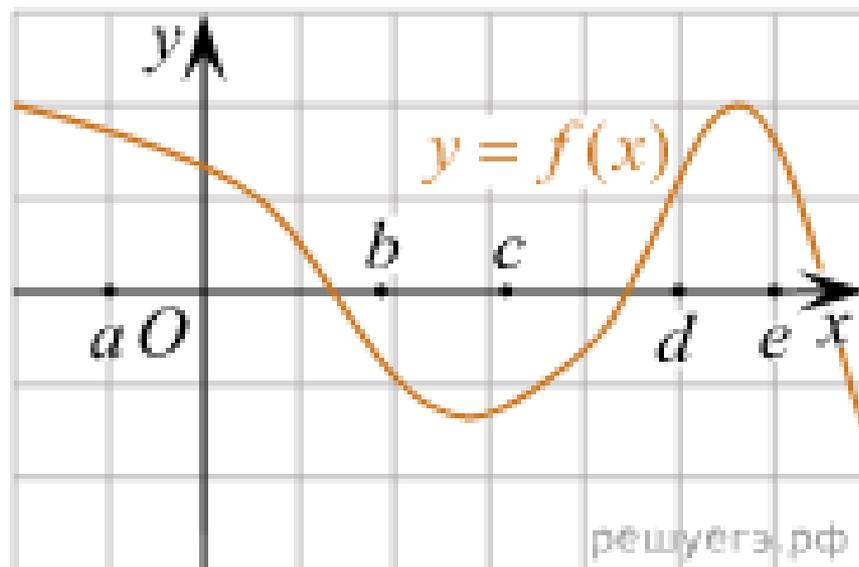


$a < 0, b = 0, c < 0$



$a < 0, b = 0, c \neq 0$





АЛГОРИТМЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Задание № 22 ОГЭ

- Преобразуем формулу, которая задает функцию.
- Определяем вид и характерные точки функции на каждом промежутке.
- Изображаем график на координатной плоскости.
- Делаем вывод относительно количества точек пересечения.
- Записываем ответ.

Задача 29. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1 \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

«Читаем» функцию.

Первая подфункция – квадратичная, вторая – линейная. Следовательно, нам предстоит нарисовать график, состоящий из части параболы и прямой.

Ветви параболы направлены вверх, одна из ветвей пересекает ось y в точке 6. Прямая возрастает и проходит через центр координат. Таким образом, нам уже немало известно.

Приравняем уравнение квадратичной функции к нулю и найдем ее корни:

$$x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Отмечаем коэффициенты: $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$.

Хотя $a = 1$, найти корни по теореме Виета невозможно: это значит, что уравнение либо не имеет корней, либо его корни являются сложными числами. Найдем их через дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = -4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 16 - 24 = -8 (< 0).$$

Дискриминант меньше нуля – значит, функция корней не имеет, то есть ветви параболы ось x не пересекают. А поскольку ветви направлены вверх, то из этого следует, что парабола находится над осью x .

Найдем ее вершину:

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2. \quad y_{\text{в}} = -\frac{D}{4a} = -\frac{-8}{4} = 2.$$

Перейдем ко второй формуле. Здесь просто найдем пару координат, чтобы нарисовать прямую: $(-1; -3)$, $(1; 3)$.

Рисуем график (рис.29а):

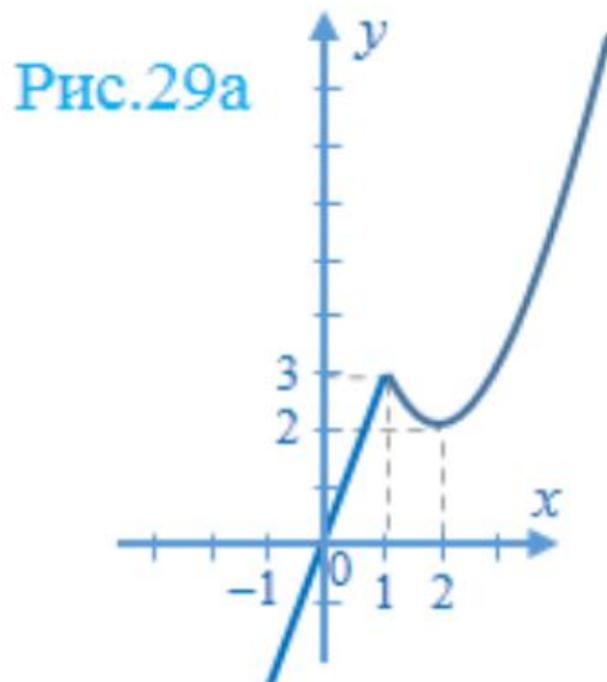
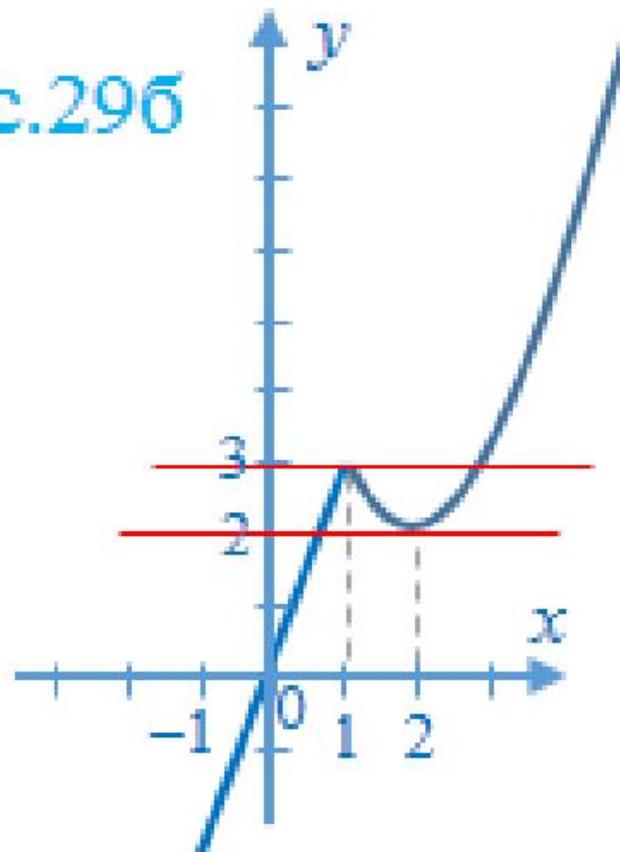


Рис.29б



Как видим, прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки при $t = 2$ и $t = 3$ (рис.29б).

Ответ: 2; 3.



Примеры заданий ОГЭ:

1. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - 2x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

2. Постройте график функции $y = x|x| + 3|x| - 5x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции $y = x^2 - |2x + 1|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

4. Постройте график функции $y = |x - 1| - 2$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

5. Постройте график функции $y = |x + 2| + 3$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Задание № 10 ЕГЭ

- Определяем формулу функции,
- Вычисляем ответ на вопрос задачи.

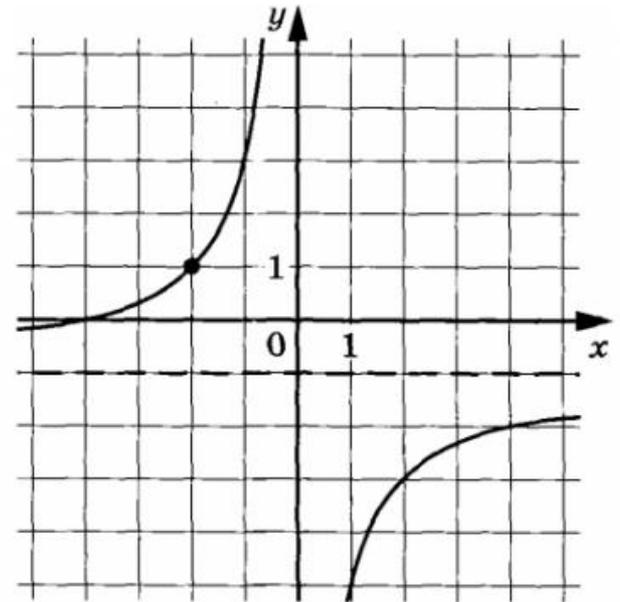
1 способ – находим формулу по точкам

9

На рисунке изображён график функции

$$f(x) = \frac{k}{x} + a. \text{ Найдите } f(-8).$$

Ответ: _____.



Алгоритм

- Находим 2 точки с целыми координатами. Обычно они выделены

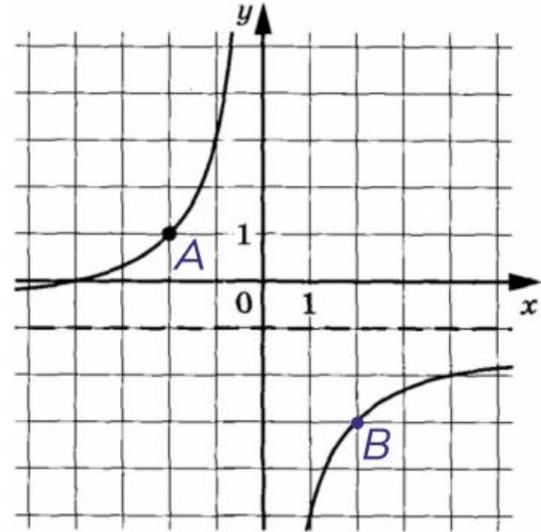
9

На рисунке изображён график функции

$$f(x) = \frac{k}{x} + a. \text{ Найдите } f(-8).$$

Ответ: _____.

$$A(-2;1) \quad B(2;-3)$$



Подставляем эти координаты в «полуфабрикат» функции.

9

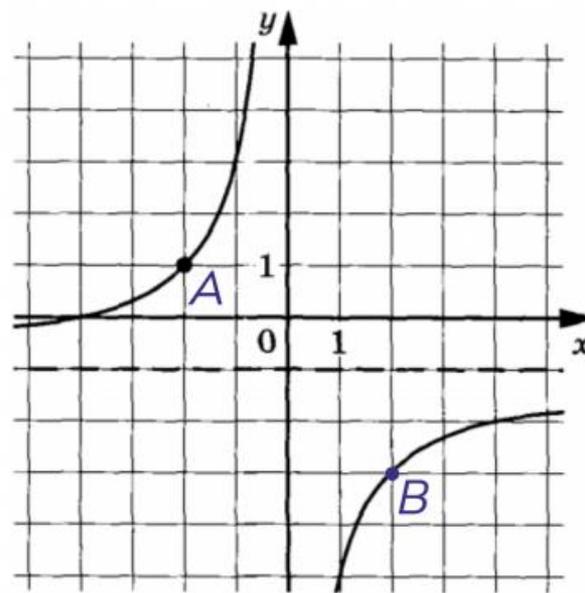
На рисунке изображён график функции

$$f(x) = \frac{k}{x} + a. \text{ Найдите } f(-8).$$

Ответ: _____.

$$A(-2;1) \quad B(2;-3)$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{k}{-2} + a \\ -3 = \frac{k}{2} + a \end{cases}$$



9

На рисунке изображён график функции

$$f(x) = \frac{k}{x} + a. \text{ Найдите } f(-8).$$

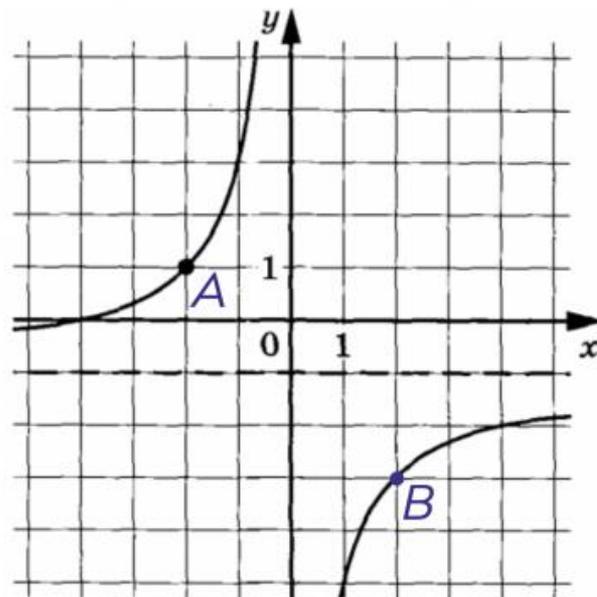
Ответ: _____.

$$A(-2;1) \quad B(2;-3)$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{k}{-2} + a & | \cdot (-2) \\ -3 = \frac{k}{2} + a & | \cdot 2 \end{cases} + \begin{cases} -2 = k - 2a \\ -6 = k + 2a \end{cases}$$

$$\frac{-8 = 2k}{k = -4}$$

$$\begin{cases} -2 = k - 2a \\ k = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = -4 - 2a \\ k = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = -4 + 2 \\ k = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = -2 \\ k = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ k = -4 \end{cases} \quad f(x) = \frac{-4}{x} - 1$$



9

На рисунке изображён график функции

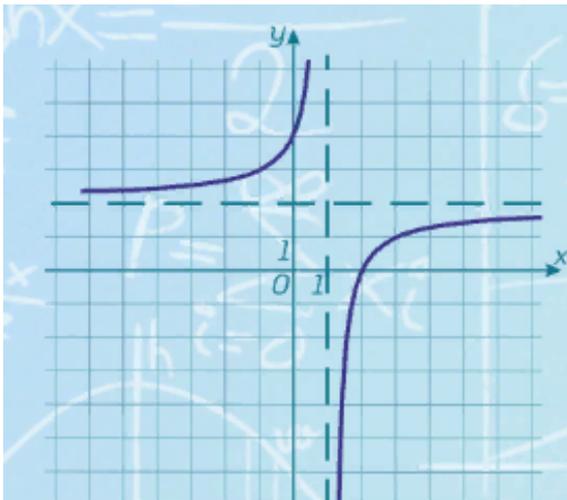
$$f(x) = \frac{k}{x} + a. \text{ Найдите } f(-8).$$

Ответ: -0,5.

$$A(-2;1) \quad B(2;-3)$$

2 способ – преобразование графиков функций

- Этот способ быстрее первого, но требует **больше знаний.**
- Для использования преобразований функций **нужно знать, как выглядят функции без изменения и как преобразования их меняют.**
- Наиболее удобно использовать этот способ для **иррациональной функции и функции обратной пропорциональности**

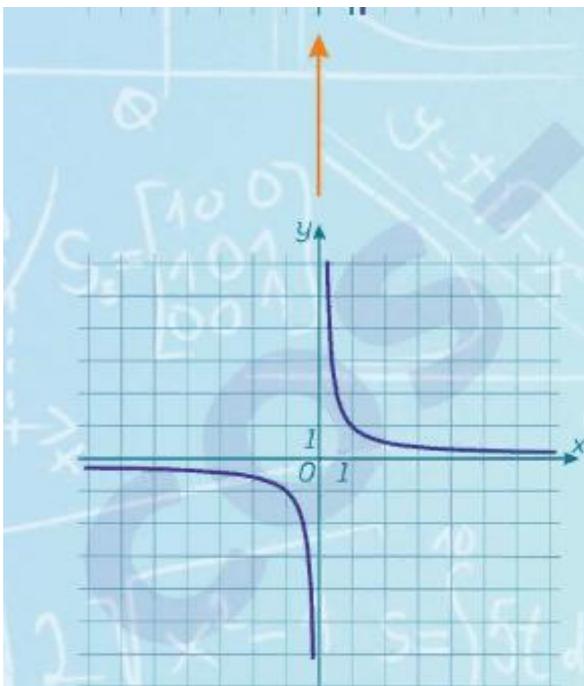


Во-первых, нужно понять какая формула была у изначальной функции и как изначальная функция выглядела. Например для графика слева это гипербола:

$$y = \frac{1}{x}$$

Во-вторых, нужно ответить на вопрос:

Что сделали с изначальной функцией, чтоб получить эту? Какие преобразования произвели?



В данном примере ответ такой:

1) Растянули график в 2 раза вдоль оси Oy.

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{2}{x}$$

2) После перевернули его вверх ногами.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow y = -\frac{2}{x}$$

3) Затем подвинули вправо на 1.

$$y = -\frac{2}{x} \rightarrow y = -\frac{2}{x-1}$$

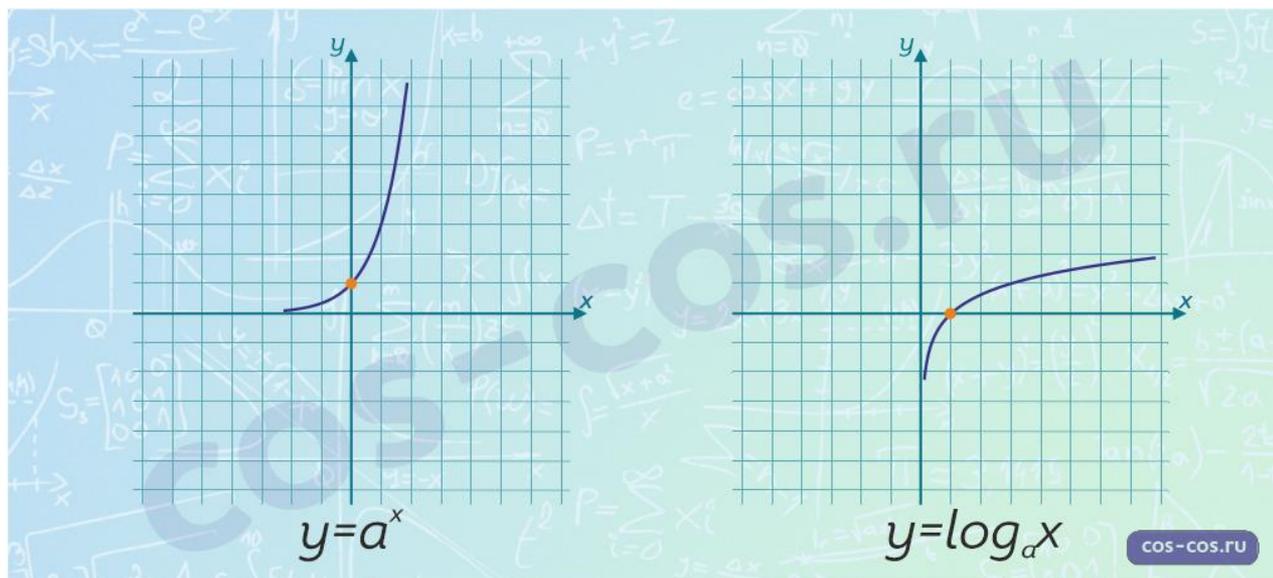
4) И наконец подняли вверх на 2.

$$y = -\frac{2}{x-1} \rightarrow y = -\frac{2}{x-1} + 2$$

«Полуфабрикат» функции	Какая была изначальная функция	Преобразования, которые сделали с графиком
$f(x)=k\sqrt{x+p}$	$f(x)=\sqrt{x}$	<p>1) Растянули график в k раз по оси Oy.</p> <p>2) Подвинули график на p влево, (если $p>0$) или на $-p$ вправо (если $p<0$).</p>
$f(x)=b+\log_a x$	$f(x)=\log_a x$	<p>1) Подняли на b (если $b>0$) или опустили на $-b$ (если $b<0$).</p>
$f(x)=\frac{k}{x+a}$	$f(x)=\frac{1}{x}$	<p>1) Растянули график в k раз вдоль оси y.</p> <p>2) Подвинули график на a влево, (если $a>0$) или вправо на $-a$ (если $a<0$).</p>

3 способ – гибридный

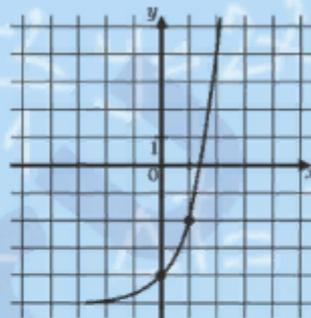
- Идеально подходит для логарифмических и показательных функций, так как обычно у таких функций неизвестно основание и с помощью преобразований его не найти.
- Независимо от оснований любая показательная функция должна проходить через точку $(0;1)$, а любая логарифмическая - через точку $(1;0)$.



По смещению этих точек легко понять, как именно двигали функцию, но только если ее не растягивали, а лишь перемещали вверх-вниз, влево-вправо (как обычно и бывает в задачах на ЕГЭ). Основание же лучше находить уже следующим действием, используя подстановку координат точки в «полуфабрикат» функции.

9

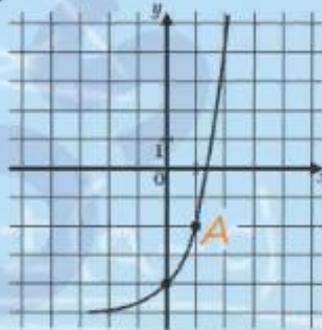
На рисунке изображён график функции $f(x)=a^x+b$. Найдите $f(4)$.



Решение:

- $f(x)=a^x+b$ - показательная функция, которую не растягивали, а лишь поднимали/опускали.
- График показательной функции обычно проходит через $(0;1)$, а этот график проходит через $(0;-4)$, очевидно его отпустили на 5 вниз, значит $b=-5$.

2. $f(x)=a^x-5$. Используем координаты второй точки - подставим их в функцию.



$$\begin{aligned} A(1;-2) &\rightarrow f(x)=a^x-5 \\ -2 &= a^1 - 5 \\ -2 + 5 &= a \\ a &= 3 \end{aligned}$$

3. Получилась функция $f(x)=3^x-5$.

$$f(4)=3^4-5=81-5=76.$$

Ответ: 76.

Как отвечать на вопросы в задаче, когда уже определили функции

9

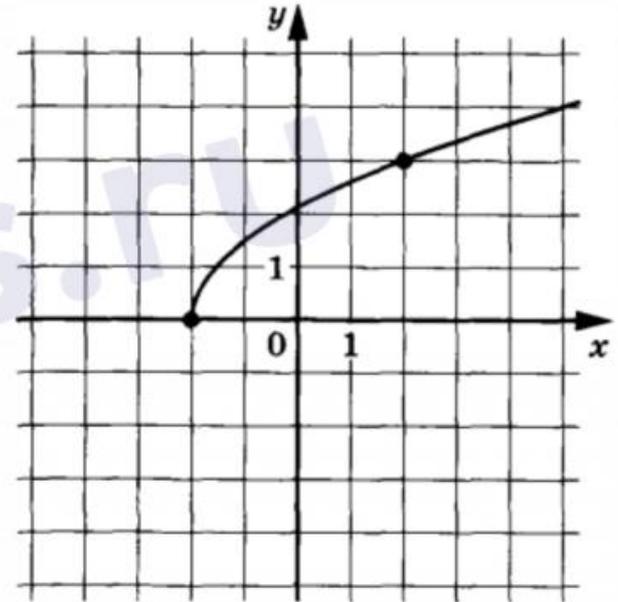
На рисунке изображён график функции

$f(x) = k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0,25)$.

Ответ: _____.

$$f(x) = 1,5\sqrt{x+2}$$

$$\begin{aligned} f(0,25) &= 1,5\sqrt{0,25+2} = 1,5\sqrt{2,25} = \\ &= 1,5 \cdot 1,5 = 2,25 \end{aligned}$$

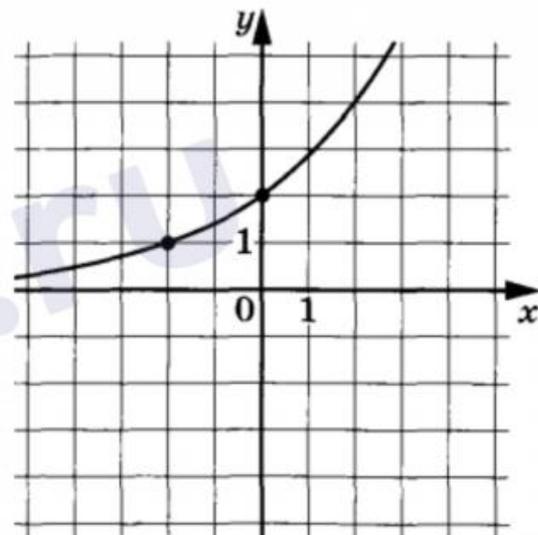


9

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 8.

Ответ: _____.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{2})^{x+2} & (\sqrt{2})^{x+2} &= 8 \\ & & 2^{0,5(x+2)} &= 2^3 \\ & & 0,5(x+2) &= 3 \\ & & 0,5x+1 &= 3 \\ & & 0,5x &= 2 \\ & & x &= 4 \end{aligned}$$



9

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках $A(-2; -3)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите x_0 .

Ответ: _____.

$$f(x) = \frac{6}{x} \quad g(x) = 4x + 5$$

$$4x + 5 = \frac{6}{x}$$

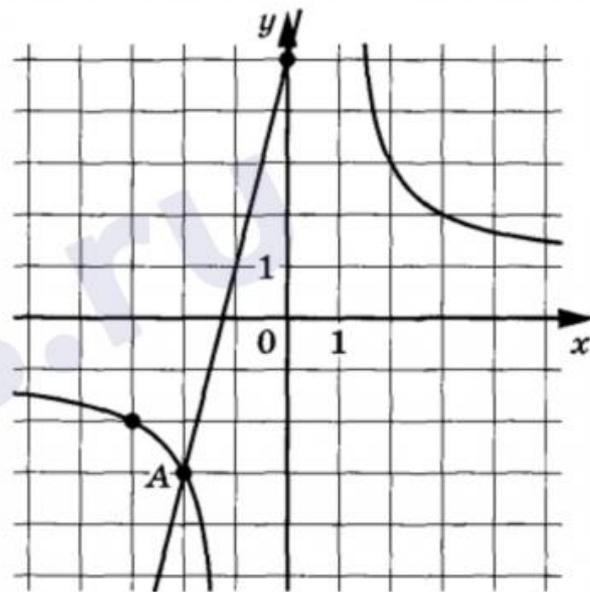
$$4x^2 + 5x = 6$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 4 \cdot 6 = 25 + 96 = 121$$

$$x_1 = \frac{-5 - 11}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \quad x_2 = \frac{11 - 5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Ответ: 0,75.



9

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точках $A(x_0; y_0)$ и $B(4; 5)$. Найдите y_0 .

Ответ: _____.

$$f(x) = 2,5\sqrt{x} \quad g(x) = x + 1$$

$$2,5\sqrt{x} = x + 1$$

$$(2,5\sqrt{x})^2 = (x + 1)^2$$

$$6,25x = x^2 + 2x + 1$$

$$6,25x - x^2 - 2x - 1 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$25x - 4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$-4x^2 + 17x - 4 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

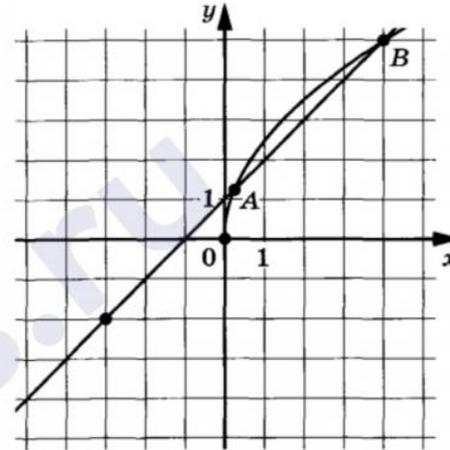
$$4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289 - 64 = 225 = 15^2$$

$$x_1 = \frac{17 - 15}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad x_2 = \frac{17 + 15}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$y_0 = f(0,25) = 2,5\sqrt{0,25} = 2,5 \cdot 0,5 = 1,25$$

Ответ: 1,25.



9

На рисунке изображён график функции

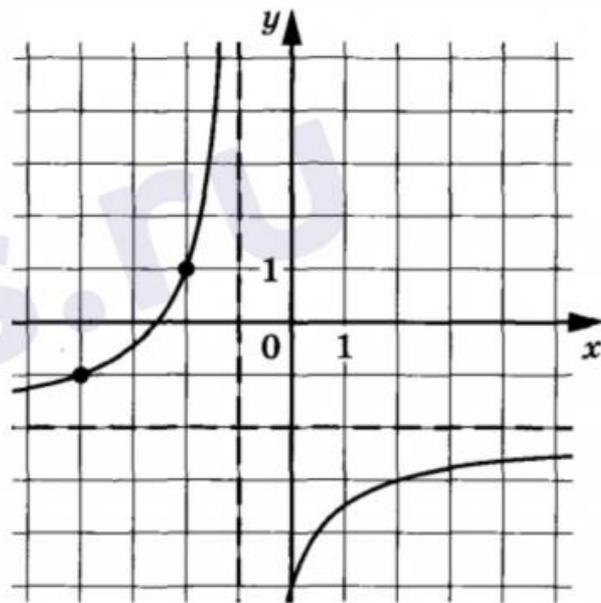
$$f(x) = \frac{kx+a}{x+b}. \text{ Найдите } k.$$

Ответ: _____.

$$f(x) = \frac{3}{x+1} - 2 = \frac{3-2(x+1)}{x+1} = \frac{3-2x-2}{x+1} =$$

$$\frac{-2x+1}{x+1}.$$

$$k = -2$$



Ресурсы

- <http://cos-cos.ru/>

The screenshot shows the top navigation bar of the cos-cos.ru website. It features three buttons: 'ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ' (highlighted in blue), 'ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ' (highlighted in green), and 'МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ' (highlighted in orange). Below the navigation bar is a table of tasks. The first row is a 'Помощь' (Help) section with a cross icon and the text 'Советы для тех кто сдает профильный ЕГЭ по математике'. The following rows are numbered tasks from 01 to 10, each with a title.

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ		ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ		МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ	
Помощь		Советы для тех кто сдает профильный ЕГЭ по математике			
Задание	01	Геометрия в 2 действия			
Задание	02	Стереометрия - развивай воображение!			
Задание	03	Невероятная теория вероятности			
Задание	04	Теория вероятности - hard edition v2.0			
Задание	05	Уравнение для самых маленьких			
Задание	06	Выражения со всем на свете (корни, дроби, логарифмы, тригонометрия и т.д.)			
Задание	07	Производная I: В королевстве графиков			
Задание	08	Математика в реале - почувствуй себя инженером			
Задание	09	Текстовые задачи из разряда "а если посложнее?"			
Задание	10	Графики - мы их ждали 10 лет			

Ресурсы

- <https://math100.ru/>
- <https://www.time4math.ru/>
- <https://sdamgia.ru/>
- <https://fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege>
- <https://fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-oge>



Время профессионального роста

Спасибо за внимание!

Контакты:

Иванова Светлана Владимировна

Контакты

Тел 8(4855) 23-15-47,

89108218924

E-mail: ivanova71@bk.ru

Институт развития образования Ярославской области

