

РОДСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Занятие 1

Цель занятия: Формирование содержания и объёма понятия «Родственные системы счисления»

Задачи занятия:

- иллюстрация необходимости введения понятия «Родственные системы счисления»,
- выделение существенных свойств понятия,
- разработка алгоритма перевода числа из одной системы счисления в другую, родственную ей,
- формирование объёма понятия «Родственные системы счисления»

План занятия:

1. Решение задач на перевод чисел из n -ичной системы счисления в k -ую, где $n=k^p$, $k=n^p$ и $n \nless k^p$, $k \nless n^p$.
2. Формулировка определения понятия «Родственные системы счисления». Решение задач на подведение под понятие и выведение свойств объекта из факта его принадлежности классу понятия.
3. Обсуждение алгоритма перевода числа из одной системы счисления в другую, родственную ей.
4. Фронтальное решение задач на перевод числа из одной системы счисления в другую, родственную ей.
5. Самостоятельная работа.

Первый этап урока: решение задач на иллюстрацию необходимости введения понятия «Родственные системы счисления»

Задание 1. Переведите число 11001101111_2 в восьмеричную систему счисления.

Указания к решению:

- Запишите число 11001101111_2 в развёрнутой форме.
- Сгруппируйте слагаемые так, чтобы в каждой скобке можно было вынести степень числа 8.
- Выполните действия в скобках. Определите развёрнутую форму какого числа вы получили.

Решение:

$$\begin{aligned} 11001101111_2 &= 1*2^{10} + 1*2^9 + 0*2^8 + 0*2^7 + 1*2^6 + 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = \\ &= (1*2^{10} + 1*2^9) + (0*2^8 + 0*2^7 + 1*2^6) + (1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3) + (1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0) = \\ &= (1*2^1 + 1)*2^9 + (0*2^2 + 0*2^1 + 1)*2^6 + (1*2^2 + 0*2^1 + 1)*2^3 + (1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0) = \\ &= (1*2^1 + 1)*8^3 + (0*2^2 + 0*2^1 + 1)*8^2 + (1*2^2 + 0*2^1 + 1)*8^1 + (1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0)*8^0 = \\ &= 3*8^3 + 1*8^2 + 5*8^1 + 7*8^0 = 3157_8 \end{aligned}$$

Задание 2. Переведите число 1101111_2 в четверичную, 16-ую и 32-ую системы счисления.

Решение:

$$1101111_2 = 1*2^6 + 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*2^6 + (1*2^5 + 0*2^4) + (1*2^3 + 1*2^2) + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*2^6 + (1*2^1 + 0)*2^4 + (1*2^1 + 1)*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*4^3 + (1*2^1 + 0)*4^2 + (1*2^1 + 1)*4 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*4^3 + 2*4^2 + 3*4 + 3 = 1233_4$$

$$1101111_2 = 1*2^6 + 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = (1*2^6 + 1*2^5 + 0*2^4) + (1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0) = (1*2^2 + 1*2^1 + 0)*2^4 + (1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0) = 6*2^4 + 15 = 6*16 + 15 = 6F_{16}$$

$$1101111_2 = 1*2^6 + 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = (1*2^6 + 1*2^5) + (0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0) = (1*2^1 + 1)*2^5 + (0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0) = 3*32 + 15 = 3F_{32}$$

Задание 3. Переведите число 220112_3 в девятеричную и 27-ую системы счисления.

Решение:

$$220112_3 = (2*3+2)*9^2 + (0*3+1)*9 + (1*3+2) = 815_9$$

$$220112_3 = (2*3^2 + 2*3 + 0)*3^3 + (1*3^2 + 1*3 + 2) = 24*27 + 14 = OE_9$$

Задание 4. Переведите число $230AC_9$ в троичную систему счисления.

Указания к решению:

- Запишите число $230AC_9$ в развёрнутой форме.
- Переведите каждую цифру девятеричного числа в троичную систему счисления и запишите её в развёрнутой форме.
- Раскройте скобки. Определите развёрнутую форму какого числа вы получили.

Решение:

$$\begin{aligned} 23078_9 &= 2*9^4 + 3*9^3 + 0*9^2 + 7*9^1 + 8*9^0 = \\ &= 2*9^4 + (1*3^1 + 0*3^0)*9^3 + 0*9^2 + (2*3^2 + 1*3^0)*9^1 + (2*3^1 + 2*3^0)*9^0 = \\ &= 2*3^8 + (1*3^1 + 0*3^0)*3^6 + 0*3^4 + (2*3^1 + 1*3^0)*3^2 + (2*3^1 + 2*3^0)*3^0 = \\ &= 2*3^8 + 1*3^7 + 0*3^6 + 0*3^4 + 2*3^3 + 1*3^2 + 2*3^1 + 2*3^0 = 2\ 10\ 00\ 21\ 22_3 \end{aligned}$$

Задание 5. Переведите число 12123_4 в двоичную систему счисления.

Решение:

$$\begin{aligned} 12123_4 &= 1*4^4 + 2*4^3 + 1*4^2 + 2*4^1 + 3*4^0 = \\ &= 1*4^4 + (1*2^1 + 0*2^0)*4^3 + (0*2^1 + 1*2^0)*4^2 + (1*2^1 + 0*2^0)*4^1 + (1*2^1 + 1*2^0)*4^0 = \\ &= 1*2^8 + (1*2^1 + 0*2^0)*2^6 + (0*2^1 + 1*2^0)*2^4 + (1*2^1 + 0*2^0)*2^2 + (1*2^1 + 1*2^0)*2^0 = \\ &= 1*2^8 + 1*2^7 + 0*2^6 + 0*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1\ 10\ 01\ 10\ 11_2 \end{aligned}$$

Задание 5 Переведите число $100AF_{125}$ в пятеричную систему счисления.

Решение:

$$\begin{aligned} 10AE_{125} &= 1*125^3 + 0*125^2 + 10*125^1 + 14*120^0 = \\ &= 1*125^3 + 0*125^2 + (2*5^1 + 0*5^0)*125^1 + (2*5^1 + 4*5^0)*125^0 = \\ &= 1*5^9 + 0*5^6 + 2*5^4 + 0*5^3 + 2*5^1 + 4*5^0 = 1\ 000\ 020\ 024_5 \end{aligned}$$

Задание 6 Переведите число $10F_{16}$ в пятеричную систему счисления.

Решение:

$10F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$ (степени пятёрки выделить не удастся, поэтому переводим число в 10-ю систему счисления) $= 256 + 15 = 271_{10} = 2 \cdot 125 + 4 \cdot 5 + 1 = 2041_5$

Второй этап занятия: работа с определением понятия «Родственные системы счисления»

Мы заметили, что если основание одной системы счисления является степенью другой системы счисления, то осуществлять перевод между ними можно не используя десятичную систему счисления, а пользуясь более удобным алгоритмом. Такие системы счисления называются родственными.

Определение: Системы счисления называются **родственными**, если основание одной системы счисления есть степень другой системы счисления.

Задания на усвоение текста определения:

- Заполните пропуски в определении: «*n*-ичная и *k*-ичная системы счисления являются родственными, если ...»
- Выберите правильную формулировку определения родственных систем счисления:
 - *n*-ичная и *k*-ичная системы счисления являются родственными, если $n=2^k$
 - *n*-ичная и *k*-ичная системы счисления являются родственными, если $n=k^2$
 - *n*-ичная и *k*-ичная системы счисления являются родственными, если $n=k^p$ »
 - *n*-ичная и *k*-ичная системы счисления являются родственными, если $n=k^p$ или $k=n^p$

Задания на подведение под понятие:

- Являются ли родственными следующие системы счисления:
 - двоичная и восьмеричная ,
 - двоичная и шестнадцатеричная,
 - шестнадцатеричная и восьмеричная,
 - троичная и девятеричная,
 - двоичная и 32-ичная,
 - пятеричная и 25-ичная,
 - 125-ичная и 25-ичная,
 - *n*-ичная и *k*-ичная, если $n=2^k$,
 - *n*-ичная и *k*-ичная, если $n=k^2$,
 - *n*-ичная и *k*-ичная, если $n=k^p$?»

Третий этап занятия: обсуждение алгоритма перевода числа из одной системы счисления в другую, родственную ей

Сформулируем в общем виде алгоритм перевода числа *A*, представленного в *n*-ичной системе счисления в *k*-ичную систему счисления, родственную ($n < k$) и алгоритм обратного перевода.

Алгоритм перевода числа *A* из *n*-ичной системы счисления в *k*-ичную, родственную ($n < k$):

1. Уточнить являются ли n -ичная и k -ичная ($n < k$) системы счисления родственными, определить в какую степень необходимо возвести n , чтобы получилось число k . Пусть $k = n^p$
2. Разделить число A на группы по r знаков, начиная с младших разрядов числа.
3. Перевести каждую группу из r знаков в k -ичную систему счисления, записать результат как цифру k -ичной системы счисления.

Необходимо уточнить, что при переводе каждой группы цифр в десятичную систему счисления мы получаем число в диапазоне от 0 до $k-1$, а значит в k -ичной и десятичной системах счисления цифры будут записаны одинаково.

Алгоритм перевода числа A из k -ичной системы счисления в n -ичную, родственную ($n < k$):

1. Уточнить являются ли n -ичная и k -ичная ($n < k$) системы счисления родственными, определить в какую степень необходимо возвести n , чтобы получилось число k . Пусть $k = n^p$
2. Перевести каждую цифру числа A в n -ичную систему счисления, дополнить нулями до r знаков и записать число.

Третий этап занятия: Решение задач на перевод из одной системы счисления в другую родственную ей

- 1) Переведите в восьмеричную систему счисления
 - 10111000_2
 - ABC_{16}
 - 123_{64}
 - 25_7

Решение:

$$10111000_2 = 270_8$$

$$ABC_{16} = 10101011100_2 = 5274_8$$

$$123_{64} = 10203_8$$

- 2) Переведите в шестнадцатеричную систему счисления
 - 10111000_2
 - 275_8
 - 123_4
 - 27_9

Решение:

$$10111000_2 = B8_{16}$$

$$275_8 = 10111101_2 = BD_{16}$$

$$123_4 = 1B_{16}$$

$$27_9 = 2 \cdot 9 + 7 = 25 = 19_{16}$$

- 3) Переведите в девятеричную систему счисления

- $22\ 01\ 12_3$
- 11100_2
- $A0B1_{27}$

Решение:

$$22\ 01\ 12_3 = 815_9$$

$$11100_2 = 16 + 8 + 4 = 28 = 3 * 9 + 1 = 31_9$$

$$A0B1_{27} = 11001201_9$$

4) Переведите в двоичную систему счисления

- $125_{10} = 1111101_2$
- $125_8 = 1010101_2$
- $125_{16} = 100100101_2$
- $12123_4 = 110011011_2$
- $123_5 = 1111011_2$

Решение:

$$125_{10} = 1111101_2$$

$$125_8 = 1010101_2$$

$$125_{16} = 100100101_2$$

$$12123_4 = 110011011_2$$

$$123_5 = 1111011_2$$

5) Переведите в 25-ую систему счисления $3\ 42\ 02\ 12\ 34\ 10\ 02_5$

Решение:

$$3\ 42\ 02\ 12\ 34\ 10\ 02_5 = 3M2JA2_{25}$$

Домашнее задание: заполнить таблицы для перевода между родственными системами счисления.

10-я	3-я	9-я	4-я	16-я	5-я	25-я
0	00	0	00	0	00	0
1	01	1	01	1	01	1
2	02	2	02	2	02	2
3	10	3	03	3	03	3
4	11	4	10	4	04	4
5	12	5	11	5	10	5
6	20	6	12	6	11	6
7	21	7	13	7	12	7
8	22	8	20	8	13	8
9			21	9	14	9

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

22	A
23	B
30	C
31	D
32	E
33	F

20	A
21	B
22	C
23	D
24	E
30	F
31	G
32	H
33	I
34	J
40	K
41	L
42	M
43	N
44	O
100	P

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

- 1) Являются ли родственными следующие системы счисления:
 - двоичная и восьмеричная,
 - шестнадцатеричная и восьмеричная,
 - троичная и девятеричная,
 - 125-ичная и 25-ичная,
 - n -ичная и k -ичная, если $n=k^p$?
- 2) Как представлено число 203_{16} в двоичной, четверичной и 256-ичной системах счисления?
($10\ 0000\ 0011_2$, $2\ 00\ 03_4$, 23_{256})
- 3) Как представлено число 203_8 в двоичной и 64-ичной системах счисления?
($10\ 000\ 011_2$, 23_{64})
- 4) Как представлено число 116_9 в троичной и 81-ичной системах счисления?
($1\ 01\ 20_3$, $1F_{81}$)
- 5) Как представлено число $2\ 01\ 01\ 43_5$ в 25-ичной системе счисления? ($211N_{25}$)
- 6) Дано: $a = EA_{16}$, $b = 354_8$. Какое из чисел C , записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?
 - 1) 11101010_2
 - 2) 11101110_2
 - 3) 11101011_2
 - 4) 11101100_2
- 7) Сколько единиц в двоичной записи восьмеричного числа 6543_8 ? (7)
- 8) Сколько единиц в двоичной записи шестнадцатеричного числа $4FA7_{16}$? (10)

Вариант 2.

- 1) Являются ли родственными следующие системы счисления:
 - двоичная и шестнадцатеричная,
 - пятеричная и 25-ичная,
 - 125-ичная и 25-ичная,
 - n -ичная и k -ичная, если $n=2^k$?
- 2) Как представлено число $11A_{16}$ в двоичной, четверичной и 256-ичной системах счисления?
($1\ 0001\ 1010_2$, $1\ 01\ 22_4$, $1Q_{256}$)
- 3) Как представлено число 207_8 в двоичной и 64-ичной системах счисления?
($10\ 000\ 111_2$, 27_{64})
- 4) Как представлено число 113_9 в троичной и 81-ичной системах счисления?
($1\ 01\ 10_3$, $1C_{81}$)
- 5) Как представлено число $2\ 01\ 02\ 21_5$ в 25-ичной системе счисления? ($212B_{25}$)
- 6) Дано: $a = E7_{16}$, $b = 351_8$. Какое из чисел C , записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?
 - 1) 11101010_2
 - 2) 11101000_2
 - 3) 11101011_2
 - 4) 11101100_2
- 7) Сколько единиц в двоичной записи шестнадцатеричного числа 1234_8 ? (5)
- 8) Сколько единиц в двоичной записи шестнадцатеричного числа 1234_{16} ? (5)

Вариант 3.

- 1) Являются ли родственными следующие системы счисления:
 - шестнадцатеричная и восьмеричная,
 - троичная и девятеричная,
 - пятеричная и 25-ичная,
 - n -ичная и k -ичная, если $n=k^2$?
- 2) Как представлено число $A0B_{16}$ в двоичной, четверичной системах счисления?
(1010 0000 1011 0001₂, 22 00 23₄)
- 3) Как представлено число 1003_8 в двоичной и 64-ичной системах счисления?
(1 000 000 011₂, 83₆₄)
- 4) Как представлено число 1215_9 в троичной и 81-ичной системах счисления?
(1 02 01 12₃, BE₈₁)
- 5) Как представлено число $1 02 21 43_5$ в 25-ичной системе счисления? (12BN₂₅)
- 6) Дано: $a = 322_8$, $b = D4_{16}$. Какое из чисел C , записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?
1) 11010011₂ 2) 11001110₂ 3) 11001010₂ 4) 11001100₂
- 7) Сколько единиц в двоичной записи восьмеричного числа 6123_8 ? (6)
- 8) Сколько единиц в двоичной записи шестнадцатеричного числа $6AB_{16}$? (8)

Вариант 4.

- 1) Являются ли родственными следующие системы счисления:
 - шестнадцатеричная и восьмеричная,
 - троичная и девятеричная,
 - 125-ичная и 25-ичная,
 - n -ичная и k -ичная, если $n=k^p$?
- 2) Как представлено число $26A3_{16}$ в двоичной, четверичной системах счисления?
(10 0110 1010 0011₂, 2 12 22 03₄)
- 3) Как представлено число 1203_8 в двоичной и 64-ичной системах счисления?
(1 010 000 011₂, A3₆₄)
- 4) Как представлено число 1012_9 в троичной и 81-ичной системах счисления?
(1 00 01 02₃, 9B₈₁)
- 5) Как представлено число 3010100_5 в 25-ичной системе счисления? (3110₂₅)
- 6) Дано: $a = D1_{16}$, $b = 333_8$. Какое из чисел C , записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?
1) 11100011₂ 2) 11011010₂ 3) 10101101₂ 4) 11011101₂
- 7) Сколько значащих нулей в двоичной записи восьмеричного числа 7512_8 ? (5)
- 8) Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $75BD_{16}$? (4)